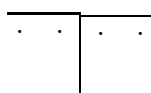


Cuando al calibrar los datos que me enviáis observo en el gráfico que hay saltos entre una placa y otra me imagino que se corresponden a distintos estacionamientos. Con los últimos fichero de coordenadas que me enviastéis, por ejemplo, de los residuos de cuyo cálculo os envié gráficas, se observa un salto grande en las placas de arriba a la derecha, que podemos medir de manera cuantitativa leyendo los valores de los residuos a uno y otro lado de la línea divisoria, como se ve en la imagen «dislocación.gif» que adjunto. Se ve que hay una diferencia casi constante de unos 1,5 píxeles entre las placas, con variaciones de unas pocas décimas de píxel, de acuerdo a la precisión de 0,3 píxel que se puede llegar a alcanzar si se miden bien las marcas sobre la fotografía.

Sea debida a estaciones distintas, sea por errores de observación dentro de una misma estación, el caso es que *se ve* en los residuos de las fotocoordenadas un movimiento entre los sistemas de coordenadas de una placa y la adyacente; es decir, *las fotocoordenadas permiten medir la posición relativa de cada placa con mayor precisión que las intersecciones de topografía*, o dicho de otra manera: se pueden emplear las fotocoordenadas para transmitir el sistema de coordenadas de una placa a la de al lado.

Tal vez parezca que en este razonamiento hay alguna trampa oculta, pues se emplean las fotocoordenadas para determinar coordenadas objeto que son a su vez las que se emplean para determinar la distorsión de la fotografía. Ciertamente no podemos transmitir la distorsión a las coordenadas objeto, pues entonces éstas empleadas para calcular la distorsión darían como resultado que la fotografía no tiene distorsión. Pero las fotocoordenadas sólo las estamos empleando para el pequeño salto de una placa a la contigua, y el método que voy a describir a continuación transmite solamente el error debido a la diferencia de distorsiones entre un lado de la divisoria entre placas y el otro. Más aún, el método que ahora describo compensa las diferencias lineales, y en una longitud de fotografía tan pequeña esto es casi como decir que el método está libre de error.

Sean los puntos extremos de la una línea de unión entre placas y los siguientes “hacia adentro” en la placa, como se ve en el dibujo:



Se miden las coordenadas de los cuatro puntos sobre la fotografía, y se calcula la distancia entre el par de puntos para cada placa. En el terreno sabemos que es 20 mm, con lo que obtenemos lo que ocupan 20 mm del terreno sobre la fotografía para esa zona del fotograma y esa dirección (si la fotografía tiene distorsión afín, como en este caso, la dirección importa). La variación entre un par y el otro se debe en parte a la precisión de las medidas, que no es infinita, y a la diferencia de distorsión en esa pequeña longitud, con lo que al promediar obtenemos lo que medirían 20 mm en el tramo central de acuerdo a la distorsión de la fotografía. Si esa cantidad es x y la longitud del tramo central es y , la distancia sobre el terreno, o sea en las placas, será $20 \cdot y/x$.

Antes de mostrar un ejemplo he de comentar que a la vista del gráfico de las distorsiones se aprecian 5 franjas verticales de placas, compuesta cada franja por una placa superior y una inferior. Además es muy clara una ruptura en la de más abajo, lo que parece ser una divisoria de placa justo en el borde de la fotografía, y aunque no tan clara también se aprecia otra en la zona superior, que parece incluir a las 6 filas superiores en el extremo derecho. También se ve otra ruptura en las 2 columnas de más a la derecha, que llegan a ser 3 en la parte de abajo. Contando puntos sobre el gráfico parece que son placas de 39×50 cruces en la izquierda y centro y 29 y 30×50 en la derecha. Como esto último no es lógico (no puede ser una placa 29 y otra 30) el salto, que por lo demás es más tenue que los de la izquierda, será un efecto visual o incluso un pequeño defecto en la propia matriz de píxeles, y el salto real entre placas, que estará a 39 , no se ve porque en este caso la diferencia entre los sistemas es más pequeña que lo que pueden detectar las fotocoordenadas. Así pues los saltos entre placas en la zona central y en la derecha son muy difusos o no se aprecian, por lo que la precisión que da la topografía está a la par o mejora la de las fotocoordenadas, mientras que entre esas y las de la zona izquierda es muy clara, así como dentro de esta zona entre la parte de arriba y la de abajo.

Vosotros sabéis cómo se dieron coordenadas a los puntos. Si las rupturas claras se corresponden con diferentes estaciones entonces el método que estoy explicando solamente hace falta aplicarlo en los saltos de estación. Si por el contrario no es así, y el que unas divisiones sean más erróneas que otras es casualidad, habría que aplicar el método a todos los saltos de placa.

Por último antes del ejemplo, en el mensaje que os envié os señalé el “rayón” que se aprecia en la parte central, abajo del gráfico, reflejo de un error en la anotación de una fotocoordenada. Encontré algún otro. Los señalo en las imágenes «arribaizquierda.gif» y «abajoderecha.gif».

Para ejemplo emplearé el salto vertical entre la placa del centro, arriba y la de la izquierda, arriba, en la esquina inferior de la junta. Son los puntos mostrados en la imagen ABCD.gif. Se trata de los puntos 10412, 10413, 10414 y 10415. antes de nada, para poder ignorar la coordenada Z en el cálculo es necesario que el sistema de coordenadas sea tal que las placas estén en un plano XY . Esto ya es así, pues la diferencia entre los valores máximo y mínimo de Z no llega a un centímetro.

Las fotocoordenadas de estos puntos son:

Punto	x	y
A	1 731,11	-1 525,84
B	1 762,32	-1 526,30
C	1 793,22	-1 526,34
D	1 824,45	-1 526,66

Las distancias son:

$$AB = 31,21 \quad BC = 30,90 \quad CD = 31,23$$

Promediando obtenemos que en el tramo BC 20 mm medirían 31,22 sobre la fotografía. Por lo que BC en el terreno es

$$BC_{\text{Terr.}} = 20 \frac{30,90}{31,22} = 19,195 \text{ mm}$$

Sus componentes X e Y son más difíciles de obtener porque la orientación de los ejes en la fotografía (la orientación de los píxeles) está ligeramente girada respecto a la orientación de los ejes en el terreno. Al contrario que la escala, que se promedia la de los dos segmentos, en el giro se toma el de la placa de referencia, en este caso la derecha, pues en la izquierda es desconocido; forma parte de lo que estamos transmitiendo de una placa a la otra. La escala era conocida porque sabemos la distancia exacta entre las cruces.

El proceso de cálculo sería finalmente como sigue: En la placa de referencia calculamos el giro más escala que transforma los vectores imagen en vectores terreno:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De donde

$$a = \frac{Xx + Yy}{x^2 + y^2} \quad b = \frac{Yx - Xy}{x^2 + y^2}$$

Las letras no representan coordenadas sino diferencias de coordenadas; son las componentes del vector CD en el terreno y en la fotografía.

En la matriz obtenida hay que reemplazar el factor de escala, que es el correspondiente al vector CD, por el promedio de los dos vectores. Esto significa reemplazar en las fórmulas para a y b el denominador $(x^2 + y^2)$ por el producto de las distancias para uno y otro vector. En el ejemplo que estamos desarrollando quedaría

$$a = \frac{Xx + Yy}{31,21 \cdot 31,23} \quad b = \frac{Yx - Xy}{31,22^2},$$

X e Y son las diferencias de coordenadas entre C y D en el terreno. Las coordenadas de estos puntos son

Punto	X	Y
C	98,192 40	150,042 13
D	98,212 39	150,042 14

de donde $X = 20$ e $Y = 0$, despreciando una centésima de milímetro.

Con estos números se obtiene $a = 0,6408$, $b = 0,0066$. Aplicando la matriz al vector CB de la fotografía resulta

$$\begin{pmatrix} 0,6408 & -0,0066 \\ 0,0066 & 0,6408 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -30,90 \\ 0,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19,80 \\ -0,18 \end{pmatrix}$$

el vector CB terreno. Así que las coordenadas de B son

$$B = C + CB = (98,17260, 150,04195)$$

La diferencia en la coordenada Y respecto al valor que aparece en el fichero es de 1,2 mm, que con la relación 31/20 entre milímetros y píxeles equivale a 1,9 px, precisamente la que se aprecia en el gráfico, como no podía ser de otra manera.

Si alguna vez se emplease este método sobre una fotografía oblicua, de manera que hubiese una diferencia apreciable en la longitud sobre la fotografía entre el vector AB y el vector CD, en lugar de la media aritmética; la media geométrica, que es lo que se hace al multiplicar las dos distancias, o cualquier otra media, que total van a arrojar el mismo resultado al aplicarlas a dos valores que son casi iguales, habría que emplear la fórmula exacta para una recta proyectiva, que una vez hechos los cálculos queda

$$BC_{\text{Terr.}} = 20 \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{CB}{BC}\right) \left(1 + \frac{CB}{CD}\right)} - 1 \right\}$$

A la derecha del igual todas las longitudes de segmentos son medidas sobre la fotografía. El 20 (20 mm) es lo que proporciona las unidades terreno.

Por cierto, las distancias entre las cruces según las coordenadas es 19,992 milímetros, ¿es eso correcto o debería ser 20 mm?

Se repite el proceso para los puntos del otro extremo de la junta, el superior, y se obtienen las coordenadas para esa otra cruz. Si las operaciones se han llevado a cabo en una hoja de cálculo no hay más que copiar, pegar y reemplazar las coordenadas de A, B, C, D por las nuevas. Se calcula la distancia entre las dos cruces y se compara con la conocida para la placa. Si la diferencia es apreciable, que puede no serlo, se corrige, alargando o acortando el vector entre las dos cruces la mitad de la corrección en cada extremo. Como la corrección va a ser ínfima y el vector sigue prácticamente la dirección del eje Y, en lugar de ponerse a hacer cálculos se le resta (suma) a la coordenada Y de la cruz superior (inferior) la mitad de la corrección a aplicar. De este modo queda definido el sistema de coordenadas para la placa de la izquierda.

Si se transmite el sistema de coordenadas desde una placa a la de la izquierda y a la de arriba, por ejemplo, y desde cada una de estas a la que se encuentra en la diagonal arriba-izquierda respecto a la primera, llegamos a la esa desde dos caminos distintos, obteniendo dos sistemas de coordenadas que se promedian con cuidado de seguir obteniendo un sistema válido; para ello se promedia la cruz de la esquina común y las otras esquinas se promedian y posteriormente se ajustan las distancias a la esquina común, que al promediar siempre disminuyen, aunque la corrección seguramente será despreciable.

Para dotar de sistema de coordenadas a una placa a partir de la adyacente transmitimos coordenadas en los puntos extremos. Para hacerlo de la mejor manera posible deberían emplearse todos los puntos de la zona de unión. Si las coordenadas están escritas en Excel se puede hacer rápido. Una vez transmitidas las coordenadas hay que ajustar los puntos obtenidos a la línea de cruces a distancias conocidas, que también es fácil.

Por varias razones me parece que la precisión en la medida de fotocoordenadas es realmente mejor que 1/3 del píxel. Transmitiendo el sistema de coordenadas de

una placa a otra empleando todos los puntos de la unión se obtendría una precisión claramente por debajo de 1/10 de píxel.

La topografía sigue siendo necesaria no obstante para dar coordenadas Z. En cuanto a la focal y el punto principal, para lo que son necesarias las bolas, lo dejo para otro mensaje, pero creo que sería posible determinarlas de otra manera y prescindir de las bolas, con todo el trabajo que ello ahorra. Además las observaciones de topografía quedarían liberadas de la necesidad de enlazar el sistema de las placas con el de las bolas, y solamente deberían centrarse en dar coordenadas a las placas, con especial atención a la Z, en un sistema arbitrario. Tal vez sería posible entonces llevar a cabo todas las observaciones con un único estacionamiento para cada teodolito, máxime cuando entonces ya no sería necesario estacionar en ningún punto en particular; simplemente nivelar, y aun esto no sería imprescindible, pero dada la precisión de los niveles automáticos de los teodolitos (los correctores de la lecutra) no lo vamos a desaprovechar.