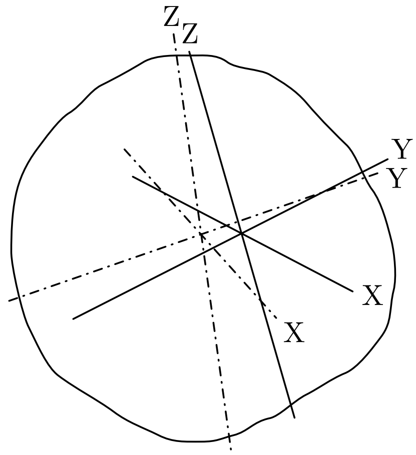
SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE

Javier A. Múgica, mai 2008

Les trois systèmes

Les systèmes de référence ont pour objet établir un système de coordonnées pour la Terre. La Terre, comme solide rigide, a 6 paramètres de liberté pour placer en elle un système d'axes.

fig. 1



La transformation entre deux systèmes sera donc une transformation de six paramètres, correspondant à une translation et une rotation.

La définition du système XYZ pour le GRS est :

Origine : Centre de gravité de la Terre, inclusant l'atmosphere

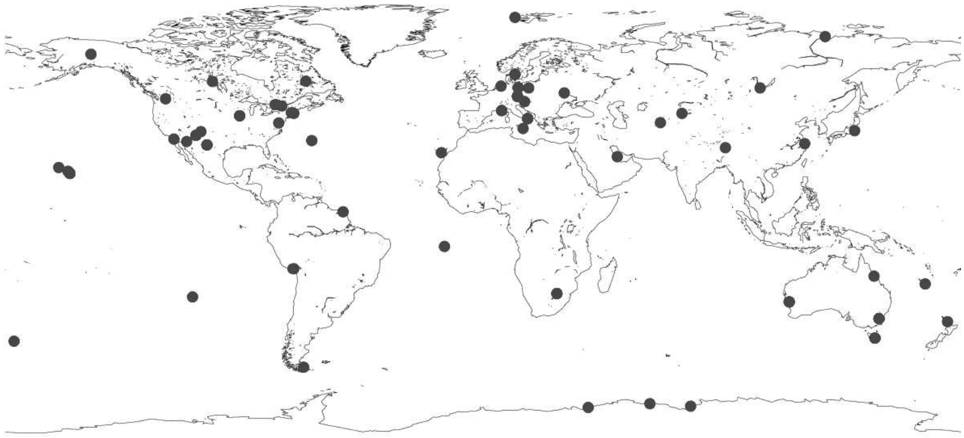
Axe OZ : Pôle de la Terre en 1984 selon la détermination du Bureau International de l'Heure.

Axe OX : Selon la direction du méridien origine du BHI (méridien de Greenwich).

Il faut distinguer entre la définition d'un système et sa réalisation pratique. Celle-ci a lieu par l'assignation à un ensemble de points de coordonnées dans le système. Ce sont des divers ITRF (International terrestial reference frame), chaque d'eux connu comme ITRFxxxx où xxxx c'est l'année des coordonnées. Les stations du ITRF2005 sont celles montrées à la page suivante.

Les coordonnées du ITRF2005 ont été obtenues par la combination de quatre méthodes : GPS (Gobal Positioning system), VLBI (Very Long Base Interferometry), SLR (Satellite Laser Ranging) and DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite).

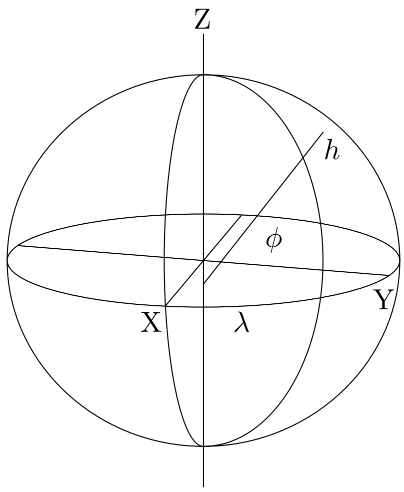
fig. 2



Pour le GPS, il y a une série de stations de contrôle qui donnent des coordonnées précises aux satellites NAVSTAR qui, à la fois, permettent d'obtenir des coordonnées pour les points qui constituent les réseaux géodésiques de divers pays.

Pour les applications cartographiques, géodésiques et autres on ne veut pas travailler avec les coordonnées dans le système cartésien géocentrique. On place un ellipsoïde ensemble avec le système cartésien. Cet ellipsoïde est défini avec deux paramètres : le demi-axe équatorial a et l'excentricité e (on donne souvent e^2). Chaque point de l'espace a des coordonnées ellipsoïdales comme on montre dans la figure. Le méridien origine des longitudes λ est pris selon la direction du axe OX. Le pair (ϕ, λ) est appelé les coordonnées géographiques du point.

fig. 3



La relation entre les coordonnées $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ et (ϕ, λ, h) est

$$\mathrm{N} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}},$$

$$\mathrm{X} = (\mathrm{N} + h)\cos\phi\cos\lambda, \qquad \mathrm{Y} = (\mathrm{N} + h)\cos\phi\sin\lambda,$$
$$\mathrm{Z} = \big((1 - e^2)\mathrm{N} + h\big)\sin\phi.$$

Les paramètres de l'ellipsoïde GRS80 sont

$$a = 6\,378\,137, \qquad e^2 = 0.006\,694\,380$$

En cartographie, génie, gestion du territoire, etc. on doit travailler avec des projections. Une projection c'est une application des points (ϕ, λ) de l'ellipsoïde sur les points (E, N) du plan. Alors, pour un point (ϕ, λ, h) on ne considère que ses coordonnées (ϕ, λ) pour calculer sa position (E, N) selon la projection.

On a donc pour chaque point coordonnées en trois systèmes : $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$, (ϕ, λ, h) et $(\mathrm{E}, \mathrm{N}, h)$.

Transformation entre systèmes

Pour transformer entre deux systèmes cartésiens $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ on applique un mouvement, c'est-à-dire, une translations plus une rotation.

Pour transformer entre deux systèmes ellipsoïdales (ϕ, λ, h), si le système cartésien auquel ils sont associés c'est le même, on passe de (ϕ_1, λ_1, h) à $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ et de ceux-ci à (ϕ_2, λ_2, h). S'il n'est pas le même, on doit en plus transformer de l'un à l'autre.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) \arrow[dr] & \\
(\phi_1,\lambda_1,h_1) \arrow[ur] & & (\phi_2,\lambda_2,h_2)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathrm{X}_1,\mathrm{Y}_1,\mathrm{Z}_1) \arrow[r, leftrightarrow] & (\mathrm{X}_2,\mathrm{Y}_2,\mathrm{Z}_2) \arrow[d] \\
(\phi_1,\lambda_1,h_1) \arrow[u] & (\phi_2,\lambda_2,h_2)
\end{tikzcd}$$

Si l'on veut transformer entre deux projections, si elles sont associées au même système $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ et au même ellipsoïde, on obtient les coordonnées ellipsoïdales et passe à l'autre projection. Si le système $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ est le même mais l'ellipsoïde ne l'est pas, on doit aller vers l'arrière de $(\mathrm{E}_1, \mathrm{N}_1, h_1)$ à (ϕ_1, λ_1, h_1) et de ceux-ci à $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$, et après faire le chemin inverse jusqu'à (ϕ_2, λ_2, h_2). Finalement, si les systèmes $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ sont aussi différents, on doit faire la transformation correspondante.

$$\begin{tikzcd}
 & (\phi,\lambda,h) \arrow[dr] & \\
(\mathrm{E}_1,\mathrm{N}_1,h_1) \arrow[ur] & & (\mathrm{E}_2,\mathrm{N}_2,h_2)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{X}_1,\mathrm{Y}_1,\mathrm{Z}_1) \arrow[dr] & \\
(\phi_1,\lambda_1,h_1) \arrow[ur] & & (\phi_2,\lambda_2,h_2) \arrow[d] \\
(\mathrm{E}_1,\mathrm{N}_1,h_1) \arrow[u] & & (\mathrm{E}_2,\mathrm{N}_2,h_2)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{X}_1,\mathrm{Y}_1,\mathrm{Z}_1) \arrow[r, leftrightarrow] & (\mathrm{X}_2,\mathrm{Y}_2,\mathrm{Z}_2) \arrow[d] \\
(\phi_1,\lambda_1,h_1) \arrow[u] & (\phi_2,\lambda_2,h_2) \arrow[d] \\
(\mathrm{E}_1,\mathrm{N}_1,h_1) \arrow[u] & (\mathrm{E}_2,\mathrm{N}_2,h_2)
\end{tikzcd}$$

Jusqu'ici on n'a pas fait mention d'un autre paramètre qui peut exister entre deux systèmes $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$. En théorie il ne devrait avoir aucun, car les coordonnées sont toujours des mètres ; mais la mesure des distances dans le passé étai très difficile et les réseaux géodésiques traditionnels ont des erreurs appréciables par rapport aux coordonnées d'aujord'hui. Donc, quand on transforme entre l'un de ces réseaux et le système ITRF on doit inclure un échelle.

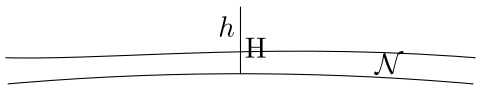
Il arrive aussi que les paramètres de transformation entre l'un de ces réseaux et un système global ne sont pas les mêmes dans un lieu et un autre. C'est à dire, les réseaux classiques ne sont pas cohérents dans toute leur étendue. Il est nécessaire donc de calculer un ensemble de paramètres locaux pour chaque zone.

Aujourd'hui, avec les réseaux des pays dans le système ITRF, ou en les actualisant à ce système, les problèmes précédents sont en train de disparaître.

Hauteur orthométrique

Les hauteurs considérées jusqu'ici sont toutes des hauteurs ellipsoïdales. Celles qu'on emploie plus souvent sont des hauteurs orthométriques, H, mesurées sur une surface équipotentielle, irrégulière :

fig. 4



On appelle géoïde cette surface équipotentielle. On écrit $\mathcal{N}$ pour son hauteur sur l'ellipsoïde, et on l'appelle «ondulation du géoïde». Donc, $\mathcal{N}$ est positive lorsque le géoïde est sur l'ellipsoïde, et négative aux points où il est au-dessous.

$$h = \mathrm{H} + \mathcal{N}$$

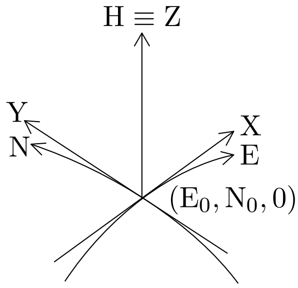
Des infinies surfaces équipotentielles, chaque pays prend une concrète, qui est déterminée, pour des pays qui ont de la côte, comme le niveau moyen de la mer à un point de leur côte. Il arrive que le niveau de la mer n'est pas le même partout. Par exemple, la différence entre le niveau au Méditerranée e à l'Atlantique (golfe de Gascogne) est de presque 2 mètres. Par suite, pays comme l'Espagne et la France, qui prennent leur origine d'hauteurs sur le Méditerranée, en Alicante et en Marseille respectivement, assignent des altitudes d'$1\frac{1}{2}$ou 2 mètres aux points sur leurs côtes Atlantiques.

Des infinies géoïdes possibles, un géoïde moyen a été choisi et pris comme *le* géoïde. Alors, les diverses surfaces équipotentielles que les pays emploient comme origine d'altitudes ont une différence, presque constante, avec le géoïde. Mais nous appelleront toujours géoïde la surface de référence des hauteurs.

Système local

Les systèmes (E, N, H) des projections ne sont pas cartésiens (les axes E et N suivent la surface de la Terre). d'autre part, le système cartésien qu'on a considéré est centré dans l'intérieur de la Terre. Pour des applications locales on veut souvent un système cartésien dont l'axe Z suive la direction de la vertical, au moins à peu près. Pour ça on place un système d'axes tangente à la surface de la Terre, avec l'origine sur un point $(\mathrm{E}_0, \mathrm{N}_0, 0)$.

fig. 5



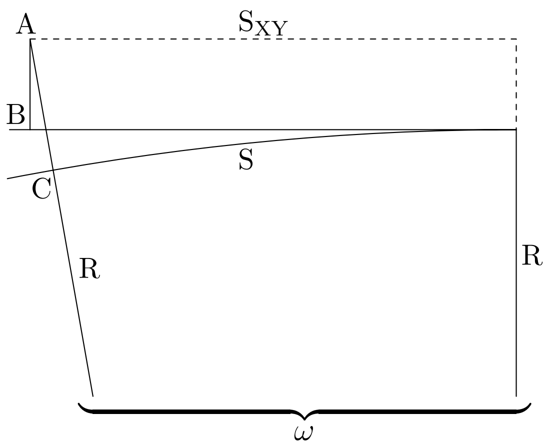
Pour transformer des coordonnées $(\mathrm{E}, \mathrm{N}, \mathrm{H})$ a celles $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ on doit noter en premier lieu que les coordonnées (E, N) ont un facteur d'échelle. Soit k le facteur d'échelle de la projections autour du point $(\mathrm{E}_0, \mathrm{N}_0)$. Alors, la longueur réelle d'une différence $\Delta\mathrm{E}$ ou $\Delta\mathrm{N}$ c'est $\Delta\mathrm{E}/k$ ou $\Delta\mathrm{N}/k$. Soit donc

$$\Delta\mathrm{E}' = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{E}_0}{k}, \qquad \Delta\mathrm{N}' = \frac{\mathrm{N} - \mathrm{N}_0}{k},$$

$$\mathrm{S}^2 = \Delta\mathrm{E}'^2 + \Delta\mathrm{N}'^2.$$

S est donc la distance sur la surface de la Terre du point (E, N) au point $(\mathrm{E}_0, \mathrm{N}_0)$.

fig. 6



En premier lieu, on va réaliser les calculs avec la simplification $\mathrm{H} = h$, c'est-a-dire, on ne placeront pas l'origine du système $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ sur le point $(\mathrm{E}_0, \mathrm{N}_0)$, $\mathrm{H} = 0$, mais sur $(\mathrm{E}_0, \mathrm{N}_0)$, $h = 0$.

Dans la figure 6, A c'est le point dont les coordonnées $(\mathrm{E}, \mathrm{N}, h)$ sont connues et dont on veut obtenir $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$; les deux rayons montrés se coupent avec un angle ω, et finalement $h = \mathrm{AC}$ et $\mathrm{Z} = \mathrm{AB}$.

La différence entre l'arc S et sa corde c'est un infinitésimal du troisième ordre quand S tend vers zéro. On peux donc l'ignorer, même pour des distances kilométriques. Par suite,

$$\mathrm{S_{XY}} = \frac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}}\,\mathrm{S}$$

et cette même rapport se réalise pour X et $\Delta\mathrm{E}'$ d'une part et Y et $\Delta\mathrm{N}'$ d'autre :

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}}\,\Delta\mathrm{E}', \qquad \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}}\,\Delta\mathrm{N}'.$$

Le calcul de Z est un peu plus long :

$$\mathrm{Z} = \mathrm{AB} = (\mathrm{R}+h)\cos\omega - \mathrm{R} = (\mathrm{R}+h)\cos\tfrac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}} - \mathrm{R}.$$

On peut approcher $\cos\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}$ par $1-\frac{1}{2}(\mathrm{S}/\mathrm{R})^2$, d'où

$$\mathrm{Z} = (\mathrm{R}+h)\left(1-\frac{(\mathrm{S}/\mathrm{R})^2}{2}\right) - \mathrm{R} = \mathrm{R}+h-\frac{\mathrm{S}^2}{2\mathrm{R}}\left(1+\frac{h}{\mathrm{R}}\right) - \mathrm{R} = h-\frac{\mathrm{S}^2}{2\mathrm{R}}\left(1+\frac{h}{\mathrm{R}}\right).$$

Formule qu'on approche à

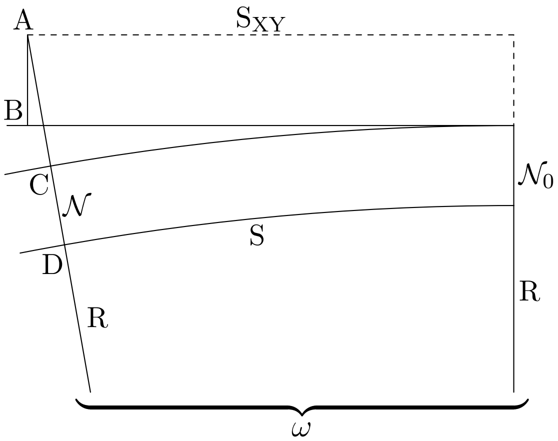
$$\mathrm{Z} = h - \frac{\mathrm{S}^2}{2\mathrm{R}}.$$

Enfin, l'ensemble des formules nécessaires pour obtenir $(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ est :

$$\begin{gathered}
\Delta\mathrm{E}' = \frac{\mathrm{E}-\mathrm{E}_0}{k}, \qquad \Delta\mathrm{N}' = \frac{\mathrm{N}-\mathrm{N}_0}{k}, \qquad \mathrm{S}^2 = \Delta\mathrm{E}'^2 + \Delta\mathrm{N}'^2, \\
\mathrm{X} = \frac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}}\,\Delta\mathrm{E}', \qquad \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}}\,\Delta\mathrm{N}', \qquad \mathrm{Z} = h-\frac{\mathrm{S}^2}{2\mathrm{R}}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Considérons maintenant une ondulation $\mathcal{N}$:

fig. 7



Donc, $\mathrm{H} = \mathrm{AC}$ et $h = \mathrm{AD}$.

Les coordonnées de la projection, (E,N), sont toujours rapportées à l'ellipsoïde, et le même argument donne

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}}\,\Delta\mathrm{E}', \qquad \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}}\,\Delta\mathrm{N}'.$$

Pour Z la démonstration est analogue à la précédent :

$$\mathrm{Z} = (\mathrm{R}+h)\cos\omega - (\mathrm{R}+\mathcal{N}_0) = (\mathrm{R}+h)\left(1-\frac{\mathrm{S}^2}{2\mathrm{R}}\right) - \mathrm{R} - \mathcal{N}_0 = h - \mathcal{N}_0 - \frac{\mathrm{S}^2}{2\mathrm{R}},$$

en faisant les mêmes approximations qu'avant. On peut l'écrire comme

$$\mathrm{Z} = \mathrm{H} + (\mathcal{N} - \mathcal{N}_0) - \frac{\mathrm{S}^2}{2\mathrm{R}}$$

Pour des applications locales on peut supposer $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$, et l'ensemble des formules est :

$$\begin{gathered}
\Delta\mathrm{E}' = \frac{\mathrm{E}-\mathrm{E}_0}{k}, \qquad \Delta\mathrm{N}' = \frac{\mathrm{N}-\mathrm{N}_0}{k}, \qquad \mathrm{S}^2 = \Delta\mathrm{E}'^2 + \Delta\mathrm{N}'^2, \\
\mathrm{X} = \frac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}}\,\Delta\mathrm{E}', \qquad \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}}\,\Delta\mathrm{N}', \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{H} - \frac{\mathrm{S}^2}{2\mathrm{R}}\ ;
\end{gathered} \tag{2}$$

qui est exactement égal au précédent sauf l'échange d'h pour H dans la formule pour Z.

On peut achever cettes formules en employant deux valeurs pour R, un d'eux selons la direction du meridien et l'autre selons la direcction du parallel :

$$\begin{gathered}
\Delta\mathrm{E}' = \frac{\mathrm{E}-\mathrm{E}_0}{k}, \qquad \Delta\mathrm{N}' = \frac{\mathrm{N}-\mathrm{N}_0}{k}, \\
\mathrm{X} = \frac{\text{₦}+h}{\text{₦}}\,\Delta\mathrm{E}', \qquad \mathrm{Y} = \frac{\rho+h}{\rho}\,\Delta\mathrm{N}', \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{H} - \left(\frac{\Delta\mathrm{E}'^2}{2\text{₦}} + \frac{\Delta\mathrm{N}'^2}{2\rho}\right).
\end{gathered} \tag{3}$$

Les valeurs de ₦ et ρ sont

$$\text{₦} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}}, \qquad \rho = \frac{(1-e^2)\text{₦}}{1-e^2\sin^2\phi}.$$

Si l'on veut utiliser un seul valeur de R, ce sera

$$\mathrm{R} = \sqrt{\text{₦}\rho} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\phi}\,a.$$

On remarque que $(1-e^2)^{1/2} = b/a,$ d'où $\mathrm{R}(0°) = b.$ On a aussi $\mathrm{R}(45°) \approx a.$