LES TRANSFORMATIONS DE SIMILITUDE

Javier A. Múgica, mai 2008

Similitude dans le plan

On commencera avec le cas bidimensionnel. On écrit $\mathbf{X}$ pour le vecteur de coordonnées d'un point : (X, Y) ou bien, quand on soit dans l'espace, $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$. Soit 1 le système de référence et 2 le système secondaire. Quand on parle d'une transformation de similitude on fait mention à une translation, une rotation et une échelle. Il est important de noter que la définition de la translation n'est pas unique :

$$\mathbf{X}_2 = \lambda \mathrm{R}(\mathbf{X}_1 - \mathrm{T})$$

$$\mathbf{X}_2 = \lambda \mathrm{R}\mathbf{X}_1 - \mathrm{T}$$

Dans ces deux expressions la translation T n'est pas la même, c'est à dire, si elles représentent la même transformation, les valeurs de T ne seront pas égales.

Soit par exemple la transformation

$$\mathbf{X}_2 = .98 \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \left(\mathbf{X}_1 - \begin{pmatrix} 102 \\ -85 \end{pmatrix} \right).$$

Elle peut être écrite aussi comme

$$\mathbf{X}_2 = .98 \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \mathbf{X}_1 - \begin{pmatrix} 29.99 \\ 126.62 \end{pmatrix}.$$

Alors, quand on donne les valeurs d'une transformation on doit préciser le critère suivi pour la translation. On doit aussi spécifier si les paramètres sont ceux qui transforment du système 1 au 2 ou bien du système 2 au 1. En conclusion, on doit donner la formule à laquelle on rapporte les paramètres.

On remarque qu'en topographie, géodésie et photogrammétrie, ce sont toujours les systèmes coordonnés qui changent, pas les points. Quand on parle d'une rotation

fig. 1

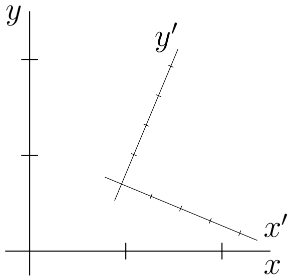
d'angle κ au dehors de ces contextes on pense souvent qu'on fait tourner les poins un angle κ au sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Si ce sont les axes qu'on fait tourner, l'effet sera le même si on les fait tourner au sens contraire, c'est à dire, au même sens que les aiguilles (*fig.* 1).

Avec ces choix, la formule reste toujours la même :

$$\begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{pmatrix}$$

et on peut l'interpréter comme qu'on fait tourner les points ou les axes. En photogrammétrie ce sera toujours le dernière cas.

Exemple : Soient les deux systèmes coordonnés montrés dans l'image.



Si la transformation que passe du système (x, y) à celui (x', y') est

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0.923 & -0.385 \\ 0.385 & 0.923 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 9.56 \\ y - 7.00 \end{pmatrix}$$

on dira que les paramètres sont

$$\mathrm{T}_x = 5.73, \quad \mathrm{T}_y = 4.20, \quad \kappa = 22°62, \quad \lambda = 3,$$

avec le critère

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \mathrm{R} \begin{pmatrix} x - \mathrm{T}_x \\ y - \mathrm{T}_x \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{pmatrix}.$$

Il est toujours nécessaire de donner le critère suivi quand il n'est pas indiqué ailleurs.

Il faut distinguer entre la définition et la manière de les calculer. Pour ça, la solution probablement la plus facile est d'exprimer la transformation comme

$$(\mathbf{X}_2 - \mathrm{G}_2) = \lambda \mathrm{R}(\mathbf{X}_1 - \mathrm{G}_1),$$

où G_1 et G_2 sont les centres de gravité des systèmes 1 et 2 respectivement. En l'exprimant comme ça il ne reste que λ et R pour calculer.

Pour des divers raisons théoriques ainsi comme pratiques la meilleure forme de calculer λ est

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum r_2^2}{\sum r_1^2}},$$

où r_1 sont les distances des points du première système au centre de gravité, et analoguement r_2.

Pour κ elle est bonne la formule

$$\kappa = \frac{\sum r_1 r_2(\theta_2 - \theta_1)}{\sum r_1 r_2}.$$

Ici θ_1 e θ_2 sont des angles antihoraires de chaque point par rapport aux points G_1 et G_2 (ils ne sont pas donc des azimuts, car ces sont des angles horaires).

Exemple : Soient six points avec des coordonnées dans les systèmes 1 et 2, comme on le montre. Trouver les paramètres de transformation.

Point	X_1	Y_1	X_2	Y_2
1	34.51	58.08	−409.6	440.6
2	31.30	34.86	−190.7	−112.3
3	35.07	13.14	164.8	−543.6
4	58.12	60.21	83.8	784.4
5	59.91	36.03	426.4	272.7
6	63.01	11.16	807.3	−238.7

On calcule les centres de gravité :

$$G_1 = (46.99, 35.58), \qquad G_2 = (147.0, 101.5)\ ;$$

et on remplit les tables suivantes :

Point	$(X_1, Y_1) - G_1$		$(X_2 - Y_2) - G_2$		r_1^2	r_2^2
1	−12.48	22.50	−556.6	340.1	662.0	425423
2	−15.69	−0.72	−337.7	−212.8	246.7	159310
3	−11.91	−22.44	17.8	−644.1	645.4	415242
4	11.13	24.63	−63.2	683.9	730.7	471715
5	12.93	0.45	279.4	172.2	167.3	107690
6	16.03	−24.42	660.3	−339.2	853.3	551006
					3305.4	2130385

Point	$r_1 r_2$	θ_1	θ_2	$\theta_2 - \theta_1$	$r_1 r_2(\theta_2 - \theta_1)$
1	16782	119°0138	148°5751	29°5613	496103
2	6269	−177°3794	−147°7787	29°6007	185573
3	16371	−117°9680	−88°4144	29°5536	483821
4	18565	65°6791	95°2825	29°6033	549589
5	4244	1°9799	31°6454	29°6654	125906
6	21684	−56°7271	−27°1891	29°5380	640502
	83916				2481492

et on trouve

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum r_2^2}{\sum r_1^2}} = \sqrt{\frac{2130385}{3305}} = 25.387, \qquad \kappa = \frac{r_1 r_2(\theta_2 - \theta_1)}{\sum r_1 r_2} = \frac{2481492}{83916} = 29°571.$$

La transformation est donc

$$\mathbf{X}_2 - \begin{pmatrix} 147.0 \\ 101.5 \end{pmatrix} = 25.387 \begin{pmatrix} 0.8697 & -0.4935 \\ 0.4935 & 0.8697 \end{pmatrix} \left(\mathbf{X}_1 - \begin{pmatrix} 46.99 \\ 35.58 \end{pmatrix} \right)$$

ou, de même,

$$\mathbf{X}_2 = 25.387 \begin{pmatrix} 0.8697 & -0.4935 \\ 0.4935 & 0.8697 \end{pmatrix} \left(\mathbf{X}_1 - \begin{pmatrix} 46.99 \\ 35.58 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6.46 \\ 1.78 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathbf{X}_2 = 25.387 \begin{pmatrix} 0.8697 & -0.4935 \\ 0.4935 & 0.8697 \end{pmatrix} \left(\mathbf{X}_1 - \begin{pmatrix} 40.53 \\ 33.80 \end{pmatrix} \right).$$

Le vecteur $(6.46, 1.78)$ a était obtenu comme,

$$\mathbf{X}_2 = \lambda \mathrm{R}(\mathbf{X}_1 - \mathrm{G}_1) + \mathrm{G}_2,$$

$$\mathbf{X}_2 = \lambda \mathrm{R}\Big(\mathbf{X}_1 - \mathrm{G}_1 + \frac{1}{\lambda}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{G}_2\Big).$$

C'est à dire, il est

$$\frac{1}{\lambda}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{G}_2,$$

et ont rappelle que, pour des matrices de rotation, $\mathrm{R}^{-1} = \mathrm{R}^{\mathsf{T}}$.

Un avertissement important

On ne doit pas, en général, calculer λ comme la moyenne arithmétique des λ_i, c'est à dire, comme

$$\lambda = \frac{\sum \frac{r_2}{r_1}}{n},$$

n étant le nombre de points, car il peut avoir lieu qu'un point soit très proche au centre de gravité. Dans ce cas r_1 e r_2 seront très petites, et la valeur r_2/r_1 pour ce point peut être très différente des autres.

Pour la même raison, on ne doit pas calculer κ comme la moyenne des κ_i.

Similitude dans l'espace

La transformation dans l'espace est formellement égale à celle du plan, mais maintenant la matrice R dépend de trois paramètres. Il y a diverses manières d'exprimer les neuf valeurs de la matrice en fonction de trois quantités ; voir l'écrit « Matrices de rotations ».

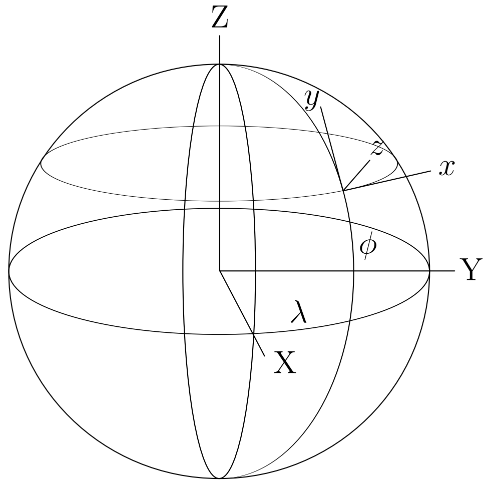
Les rotations autour des axes X, Y et Z, qu'on dénote souvent comme Ω, Φ et K, ont des expressions

$$\mathrm{M}_\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega & -\sin\Omega \\ 0 & \sin\Omega & \cos\Omega \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\Phi & 0 & \sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{M}_\mathrm{K} = \begin{pmatrix} \cos\mathrm{K} & -\sin\mathrm{K} & 0 \\ \sin\mathrm{K} & \cos\mathrm{K} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple : Trouver la transformation de coordonnées géocentriques à coordonnées rectangulaires locales.

fig. 2



Soient $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ les coordonnées géocentriques et (x, y, z) les coordonnées dans le système local. Pour passer de coordonnées géocentriques à coordonnées locales on doit en primer lieu déplacer le système du centre de la Terre au centre du système local. Soient $(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0, \mathrm{Z}_0)$ les coordonnées géocentriques de ce point :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{X}_0 \\ \mathrm{Y}_0 \\ \mathrm{Z}_0 \end{pmatrix}.$$

Le point $(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0, \mathrm{Z}_0)$ aura des coordonnées géographiques (ϕ_0, λ_0). Le système local sera tel que l'axe y visera le Nord. Pour obtenir ça on doit en premier lieu faire tourner autour de l'axe Z une valeur $-(90^\circ + \lambda_0)$ et après faire tourner selon l'axe X une valeur $\phi_0 - 90^\circ$. On a

$$\cos(-(90^\circ + \lambda_0)) = -\sin\lambda_0, \qquad \sin(-(90^\circ + \lambda_0)) = -\cos\lambda_0,$$
$$\cos(\phi_0 - 90^\circ) = \sin\phi_0, \qquad \sin(\phi_0 - 90) = -\cos\phi_0,$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\phi_0 & \cos\phi_0 \\ 0 & -\cos\phi_0 & \sin\phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0 \\ -\cos\lambda_0 & -\sin\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{X}_0 \\ \mathrm{Y}_0 \\ \mathrm{Z}_0 \end{pmatrix} \right\}$$

En faisant les opérations on arrive à

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0 \\ -\sin\phi_0\cos\lambda_0 & -\sin\phi_0\sin\lambda_0 & \cos\phi_0 \\ \cos\phi_0\cos\lambda_0 & \cos\phi_0\sin\lambda_0 & \sin\phi_0 \end{pmatrix}.$$

On pourrait aussi penser la rotation du système géocentrique à celui local comme une rotation $-\lambda_0$ autour de l'axe Z, après une rotation ϕ_0 autour de l'axe Y, est finalement un changement d'axes X $\to$ Y $\to$ Z $\to$ X. Dans ce cas on obtiendrait la matrice de rotation comme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 \\ 0 & \sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\lambda_0 & \sin\lambda_0 & 0 \\ -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Évidemment, en faisant les opérations on arrive à la même matrice R.

Et, si l'on avait pris le critère contraire pour le signe des rotations, on donnerait pour des rotations des valeurs contraires, mais les matrices resteraient égales.

Exemple : Soient les neuf points

Point	X_1	Y_1	Z_1	X_2	Y_2	Z_2
1	3621.48	10887.57	173.81	−56.654	−77.858	−151.461
2	3517.12	10132.95	147.80	−1.193	−46.872	−152.264
3	3639.84	9427.05	233.60	39.763	−3.817	−142.735
4	4388.87	10956.83	227.57	−99.646	−30.511	−143.317
5	4447.14	10170.81	38.79	−50.403	13.774	−156.792
6	4547.92	9362.54	124.90	−1.529	60.494	−147.092
7	5005.78	10988.85	252.08	−132.651	8.839	−138.270
8	5107.50	10075.63	2.60	−77.173	62.723	−156.268
9	4999.20	9417.13	150.60	−27.741	87.676	−142.831

Trouver la transformation de similitude d'une système à l'autre.

En primer lieu on calcule les centres de gravité dans l'un et l'autre système et on réduit les coordonnées à ces centres. On trouve

$$\mathrm{G}_1 = (4363.87, 10157.70, 150.19), \qquad \mathrm{G}_2 = (-45.247, 8.272, -147.892),$$

et les coordonnées par rapport à ces points, qu'on appellera (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont

Point	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2
1	−742.39	729.86	23.62	−11.407	−86.130	−3.569
2	−846.75	−24.75	−2.40	44.054	−55.144	−4.372
3	−724.03	−730.65	83.40	85.010	−12.088	5.157
4	25.00	799.12	77.38	−54.399	−38.783	4.575
5	83.27	13.11	−111.40	−5.156	5.502	−8.900
6	184.05	−795.17	−25.30	43.718	52.222	0.800
7	641.90	831.15	101.89	−87.404	0.567	9.622
8	743.63	−82.08	−147.59	−31.925	54.451	−8.376
9	635.33	−740.58	0.40	17.507	79.404	5.062

On trouves les quantités

$$\sum r_1^2 = 6845400 \quad \text{et} \quad \sum r_2^2 = 47644.7,$$

d'où

$$\lambda = \sqrt{\frac{47644.7}{6845400}} = 0.08343$$

et il ne reste que R à calculer.

On voix que la variation de Z dans les deux systèmes est beaucoup plus petite que celle de X et Y, et donc les rotations Ω et Φ sont petites, mais K peut être grande. Ça c'est le plus habituel en photogrammétrie. Dans cette situation on peut obtenir R par une méthode simplifiée.

On commence par obtenir κ comme on le faisait dans le plan :

$$\kappa = \frac{\sum r_{1xy} r_{2xy} (\theta_2 - \theta_1)}{\sum r_{1xy} r_{2xy}}.$$

Ici le sous-index xy veut dire qu'on ne calcule r qu'avec les coordonnées x et y ; c'est à dire, on calcule κ *exactement* comme dans le plan.

On va exprimer R comme $\mathrm{R}_\Delta \mathrm{R}_\kappa$, dont R_κ est la matrice de la rotation κ qu'on vient de calculer, et R_Δ est une matrice avec des angles ω e ϕ petites. Pour obtenir ω et ϕ on doit en primer lieu appliquer la rotation κ aux points $\mathbf{x}_1$. On appellera $\mathbf{x}'_1$ les coordonnées résultantes de cette rotation :

$$\sum r_{1xy} r_{2xy} (\theta_2 - \theta_1) = 72511948, \qquad \sum r_{1xy} r_{2xy} = 571092.5, \qquad \kappa = 126°971;$$

$$\mathrm{R}_\kappa = \begin{pmatrix} -0.60140 & -0.79894 & 0 \\ 0.79894 & -0.60140 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et les coordonnées $\mathbf{x}_1' = \mathrm{R}_\kappa \mathbf{x}_1$ sont

Point	x_1'	y_1'	z_1'
1	−136.64	−1032.07	23.62
2	529.02	−661.62	−2.40
3	1019.19	−139.04	83.40
4	−653.49	−460.62	77.38
5	−60.55	58.64	−111.40
6	524.61	625.26	−25.30
7	−1050.08	12.99	101.89
8	−381.64	643.48	−147.59
9	209.59	952.98	0.40

On remarque que la coordonnée z_1' reste égale.

Soit maintenant

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \sum y_1' y_2 & -\sum \sqrt{x_1' y_1' x_2 y_2} \\ -\sum \sqrt{x_1' y_1' x_2 y_2} & \sum x_1' x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \sum (y_1' z_2 - z_1' y_2) \\ \sum (z_1' x_2 - x_1' z_2) \end{pmatrix}.$$

ω e ϕ sont

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \phi \end{pmatrix} = \mathrm{N}^{-1}\mathrm{L}.$$

Appliquant ces formules on obtient

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 288614 & 144028 \\ 144028 & 277936 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 19080 \\ 2235 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathrm{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 4.67 \cdot 10^{-6} & -2.42 \cdot 10^{-6} \\ -2.42 \cdot 10^{-6} & 4.85 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \omega \\ \phi \end{pmatrix} = \mathrm{N}^{-1}\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0.08376 \\ -0.03536 \end{pmatrix}.$$

Ces valeurs de ω et ϕ sont en radians. Si on les veut en dégrées on doit les transformer :

$$\omega = 4°7999, \qquad \phi = -2°026.$$

La matrice associée à deux valeurs petites de ω et ϕ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & 1 & -\omega \\ -\phi & \omega & 1 \end{pmatrix}.$$

(ω et ϕ en radians). Si ont veut une formule exact on peut prendre une quelconque qui en première approximation soit comme la précédente.

Pour les valeurs ω et ϕ obtenues on a

$$\mathrm{R}_\Delta = \begin{pmatrix} 0.99937 & -0.00148 & -0.03536 \\ -0.00148 & 0.99649 & -0.08376 \\ 0.03536 & 0.08376 & 0.99587 \end{pmatrix}$$

et finalement

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_\Delta \mathrm{R}_\kappa = \begin{pmatrix} -0.60221 & -0.79755 & -0.03536 \\ 0.79703 & -0.59811 & -0.08376 \\ 0.04565 & -0.07862 & 0.99587 \end{pmatrix}.$$

Alors, la solution complète, comme nous devons la donner, est

$$\mathbf{X}_2 - \mathrm{G}_2 = \lambda \mathrm{R}(\mathbf{X}_1 - \mathrm{G}_1),$$

$$\mathrm{G}_1 = (4363.87, 10157.70, 150.19), \qquad \mathrm{G}_2 = (-45.247, 8.272, -147.892),$$

$$\lambda = 0.08343, \qquad \mathrm{R} = \begin{pmatrix} -0.60221 & -0.79755 & -0.03536 \\ 0.79703 & -0.59811 & -0.08376 \\ 0.04565 & -0.07862 & 0.99587 \end{pmatrix}.$$

On ne donne pas les valeurs de κ, ω et ϕ parce qu'on devrait donner avec eux la formule qui exprime la matrice de rotation en fonction d'eux, et ça c'est plus laborieux que de donner la propre matrice.

Pour abréger les opérations on peut introduire λ dans la matrice R. On appellera S le produit λR.

$$\mathrm{S} = \lambda \mathrm{R} = \begin{pmatrix} -0.050241 & -0.066538 & -0.002950 \\ 0.066494 & -0.049899 & -0.006987 \\ 0.003808 & -0.006559 & 0.083083 \end{pmatrix}.$$

Mais on n'a plus $\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}^\mathsf{T}$. C'est qu'on a maintenant c'est :

$$\mathrm{S}^{-1} = \tfrac{1}{\lambda^2}\mathrm{S}^\mathsf{T} \quad \text{et} \quad \lambda = \sqrt[3]{|\mathrm{S}|}.$$

Application : Soit $(4\,900, 10\,000, 180)$ un point dans le système 1. Trouver ses coordonnées dans le système 2.

Soit $(-70, 10, -150)$ un point dans le système 2. Trouver ses coordonnées dans le système 1.

De 1 à 2 :

$$\mathbf{X}_2 - \mathrm{G}_2 = \mathrm{S}(\mathbf{X}_1 - \mathrm{G}_1) = \mathrm{S}\left\{ \begin{pmatrix} 4\,900 \\ 10\,000 \\ 180 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4\,363.87 \\ 10\,157.70 \\ 0\,150.19 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{S}\begin{pmatrix} 536.13 \\ -157.70 \\ 29.81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16.530 \\ 43.310 \\ 5.553 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -16.530 \\ 43.310 \\ 5.553 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -45.247 \\ 8.272 \\ -147.892 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -61.778 \\ 51.582 \\ -142.339 \end{pmatrix}.$$

De 2 à 1 :

$$\mathbf{X}_1 - \mathrm{G}_1 = \tfrac{1}{\lambda}\mathrm{R}^{\mathsf{T}}(\mathbf{X}_2 - \mathrm{G}_2) = \tfrac{1}{\lambda}\mathrm{R}\begin{pmatrix} -24.753 \\ 1.728 \\ -2.108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 194.03 \\ 226.23 \\ -16.40 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 194.03 \\ 226.23 \\ -16.40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\,363.87 \\ 10\,157.70 \\ 150.19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,557.90 \\ 10\,383.93 \\ 133.79 \end{pmatrix}.$$

Transformation des matrices de rotation

Quand on transforme d'un système à un autre il faut transformer aussi les matrices de rotation des objets (typiquement des photogrammes). Si M_1 est la matrice de rotation d'un photogramme, ça veut dire que

$$\mathbf{x} = \mathrm{M}_1\mathbf{X}_1 \;+\; \textit{une translation} \;+\; \textit{une échelle},$$

dont $\mathbf{X}_1$ sont les coordonnées dans le système du terrain et $\mathbf{x}$ dans le système du centre de projection. Si l'on considère maintenant un autre système 2, et soit R la matrice pour aller du système 1 au 2, pour aller du système 2 à celle du centre de projection on doit effectuer les rotations

$$\mathbf{X}_2 \xrightarrow{\;\mathrm{R}^{\mathsf{T}}\;} \mathbf{X}_1 \xrightarrow{\;\mathrm{M}_1^{\mathsf{T}}\;} \mathbf{x},$$

et la nouvelle matrice de rotation du photogramme est alors

$$\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_2\mathrm{R}^{\mathsf{T}}.$$

Application : Soit

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} -0.443491 & -0.896135 & 0.016066 \\ 0.896261 & -0.443524 & 0.001647 \\ 0.005650 & 0.015130 & 0.999870 \end{pmatrix}$$

la matrice de rotation d'un photogramme dans le système 1 de l'exemple antérieur. Trouver la matrice de rotation de cet photogramme dans le système 2.

On l'obtient aisément comme

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_1\mathrm{R}^{\mathsf{T}} = {} & \\ & \begin{pmatrix} -0.443491 & -0.896135 & 0.016066 \\ 0.896261 & -0.443524 & 0.001647 \\ 0.005650 & 0.015130 & 0.999870 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.602212 & 0.797033 & 0.045650 \\ -0.797554 & -0.598112 & -0.078622 \\ -0.035360 & -0.083755 & 0.995870 \end{pmatrix} \\ = {} & \begin{pmatrix} 0.981224 & 0.181167 & 0.066210 \\ -0.186063 & 0.979489 & 0.077425 \\ -0.050825 & -0.088290 & 0.994808 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soit

$$\mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 0.986845 & 0.161466 & 0.008079 \\ -0.161320 & 0.986767 & -0.016333 \\ -0.010609 & 0.014814 & 0.999834 \end{pmatrix},$$

dans le système 2. Trouver M_1.

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2\mathrm{R} = \begin{pmatrix} -0.465227 & -0.884273 & -0.040373 \\ 0.882889 & -0.460252 & -0.093208 \\ 0.063838 & -0.079008 & 0.994839 \end{pmatrix}.$$