# Error de escala debido a la proyección cartográfica

Javier Múgica de Rivera

19 de diciembre de 2004

## Introducción

Es bien sabido que en fotogrametría intervienen numerosos sistemas de coordenadas, y que hay que tener especial cuidado al pasar de unos a otros para no cometer ningún error. Entre estos posibles errores se encuentra el debido a no tratar de manera adecuada las coordenadas de los puntos que están en el sistema de la cartografía (sistema terreno): puntos de apoyo y centros de proyección. Para estas coordenadas se suele aplicar simplemente una corrección por esfericidad, ignorando una segunda corrección, despreciable en algunas situaciones, en absoluto despreciable en otras, pero que en todo caso es un error sistemático que se suele cometer sin saberlo, por desconocimiento, lo que considero grave.

El error en cuestión es debido a que la escala de una proyección conforme[1] no es uniforme en toda la Tierra (o en toda la región en la que se aplique); es decir, que en una zona los metros son «más grandes» que en otras. Al calcular la orientación externa este error se traduce, paradójicamente, en una deformación del conjunto en altimetría, y a su vez este error se transmitirá a todos los productos que se obtengan a partir de esos fotogramas. El error es particularmente importante en el caso de que se conozcan coordenadas de los centros de proyección mediante algún sistema de navegación y dichas coordenadas *no* estén afectadas por un error constante, o bien queramos autocalibrar la distancia focal.

Resulta sorprendente el desconocimiento que existe acerca de este error, tanto en el ámbito profesional como en el académico (en lo que a mí me es conocido), así como en los manuales de fotogrametría. En lo que respecta a los programas comerciales, algunos solicitan información acerca del sistema de coordenadas en el que se encuentran los puntos de apoyo mientras que otros no lo hacen. Yo descubrí el error hace un par de años, trabajando en mi proyecto fin de carrera, al comparar los resultados de dos orientaciones diferentes de un mismo bloque, realizada una transformando rigurosamente los puntos de apoyo a un sistema cartesiano y la otra mediante una transformación local. Las coordenadas obtenidas de los centros de proyección diferían sistemáticamente en varios metros. El presente artículo es prácticamente un extracto de la memoria de dicho proyecto.

[1] Las proyecciones no conformes presentan problemas aún mayores y ni siquiera se consideran para trabajar en fotogrametría.

## Transformación de los puntos de apoyo

El refinamiento de coordenadas consiste en la aplicación de un conjunto de correcciones a las coordenadas medidas sobre el soporte (coordenadas comparador o píxel) para obtener las que corresponderían a las imágenes de los puntos de acuerdo al modelo matemático de proyección considerado (en la toma de vistas tradicional, proyección central), de manera que puedan ser utilizadas en los cálculos fotogramétricos. Se termina con la corrección por refracción.

Por el contrario, las coordenadas de los puntos del objeto (la Tierra) no se pueden introducir directamente en los cálculos. Las relaciones matemáticas entre fotocoordenadas y coordenadas del objeto están deducidas en el supuesto de que ambas estén en sistemas cartesianos. De acuerdo con esto las coordenadas de los puntos de apoyo han de transformarse a un sistema cartesiano. Esta transformación requiere muchas veces una gran cantidad de cálculos. Lo que se hace para evitarla es tratar las coordenadas de la proyección como si fuesen cartesianas, lo que supone un cambio en la posición espacial de los puntos, que pasan a estar situados como si la tierra fuese plana (los puntos con una misma Z en un plano). Entonces hay que modificar sus fotocoordenadas. Esta última transformación se incluye en el refinamiento de coordenadas.

Actualmente la capacidad de cálculo de los ordenadores no hace necesario este artificio, y el refinamiento de coordenadas puede terminarse con la corrección por refracción.

### Sistema de coordenadas desconocido

En este caso sólo se aplica una corrección por esfericidad. Tomamos un punto $(E_0, N_0, 0)$ como origen del sistema cartesiano, que puede ser la media de las coordenadas $(E, N)$. Los ejes $X$ e $Y$ son tangentes a los ejes $E$ y $N$ en el punto (Fig. 1).

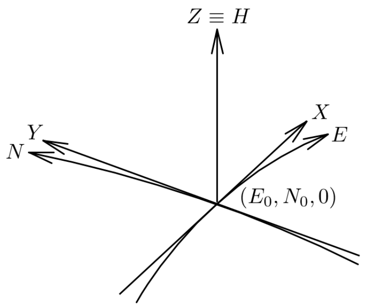



Fig. 1

Sea $\Delta E = E - E_0$, $\Delta N = N - N_0$ y $S = \sqrt{\Delta E^2 + \Delta N^2}$. Lamaremos $R$ al radio terrestre. Una vez hechas las operaciones, y tras despreciar los términos despreciables, se llega a

$$X = \frac{R + H}{H} \Delta E \tag{1}$$

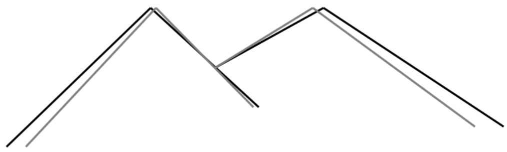
$$Y = \frac{R + H}{H} \Delta N \tag{2}$$

$$Z = H - \frac{S^2}{2R} \tag{3}$$

## Deformación del modelo

Si no tenemos en cuenta el sistema en el que están las coordenadas de los puntos de apoyo se comete un error. La razón estriba en que las coordenadas $(E, N)$ de la proyección están afectadas por un factor de escala. Si la diferencia de coordenadas entre dos puntos es $(\Delta E, \Delta N)$, lo que miden estas diferencias sobre la superficie terrestre es en realidad $(\Delta E/k, \Delta N/k)$. Si la coordenada $H$ también estuviese afectada por este factor de escala no habría problema, ya que entonces al transformar los puntos de apoyo formarían éstos una figura demasiado grande o demasiado pequeña, y un conjunto de haces proyectivos (las fotografías) puede adaptarse a cualquier escala. Al deshacer la transformación para dar los resultados en el sistema $(E, N, H)$ vuelve todo a la escala correcta.

Como el factor de escala sólo afecta a las coordenadas planimétricas, al transformar las coordenadas sin tenerlo en cuenta estamos deformando el terreno, definido por los puntos de apoyo, al que ha de ajustarse el modelo.



La línea negra representa el terreno real, y la gris el terreno transformado sin tener en cuenta el factor de escala, al que forzaremos que se ajusten los fotogramas. El dibujo corresponde a una escala local de la proyección $k < 1$.

El modelo, para ajustarse al terreno, básicamente lo que puede hacer es agrandarse o empequeñecer, alejando o acercando los fotogramas entre sí. En este caso se acercarán. Pero con eso se reduce el tamaño de todo el modelo, incluidas las diferencias de altura, lo que generará residuos en las fotocoordenadas. Cuando se resuelve la orientación externa, los parámetros que resultan son los que hacen que todos los residuos sean más o menos pequeños, así que resultará un modelo a una escala intermedia entre $k$ y 1. Pero como las variaciones en $Z$ son mucho menores que en $X$ e $Y$ (la tierra es un objeto «plano»), un mismo error en la escala produce un error métrico mucho mayor en planimetría que en altimetría, de modo que el modelo se formará prácticamente a la escala que más se ajuste a la planimetría, es decir, $k$.

El modelo ajustado es la línea de trazos. Es igual que el terreno pero más pequeño. Al deshacer la transformación de coordenadas y pasar otra vez a $(E, N, H)$, la planimetría vuelve a su dimensión real, pero las coordenadas $H$ siguen disminuidas. El error es $(k-1)\Delta H$. Al resolver la orientación externa, cada fotograma se mueve de manera que sus haces se ajusten en la medida de lo posible a los puntos de apoyo y a los haces de los fotogramas contiguos. Entonces, no hay que tomar la $\Delta H$ de todo el bloque, sino la de cada zona comprendida entre dos fotogramas (el modelo tradicional) (Fig. 2).

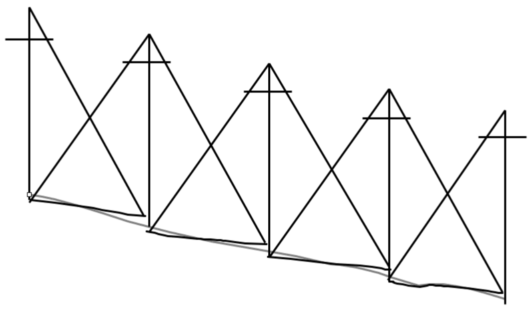


Fig. 2

Para $k=1{,}0005$, con un desnivel de 1000 metros el error es 25cm. Con $k=1{,}0002$ y un desnivel de 200m, el error cometido es 2cm.

El efecto mayor se produce en las coordenadas de los centros de proyección. Para el valor de $k$ anterior, 1.0005, y una altura de vuelo media sobre el terreno de 6000 metros, el error es 3m. Se pondrá de manifiesto si se pueden conocer las coordenadas de los centro de proyección por otros medios (i.e. GPS sin error de desplazamiento).

La manera de corregirlo es transformar correctamente las coordenadas.

$$X = \frac{R+H}{H}\Delta E/k \tag{4}$$

$$Y = \frac{R+H}{H}\Delta N/k \tag{5}$$

$$Z = H - \frac{S^2}{2R} \tag{6}$$

$$S^2 = (\Delta E/K)^2 + (\Delta N/K)^2$$

Para fotografía vertical el efecto de este error es exactamente el mismo que el de trabajar con una focal que no es la correcta. Por ello, otra manera de corregir los efectos del error consiste en variar la distancia focal, de forma que los dos errores se anulen. Por ejemplo, con $k = 0{,}9996$ y $\mathrm{f} = 150{,}000$, si no tenemos en cuenta el valor de $k$ en la transformación de las coordenadas pero introducimos en los cálculos una focal $150/k = 150{,}060$, obtenemos resultados libres de error en lo que a la escala se refiere.

Si se calculó la orientación externa teniendo en cuenta el factor de escala pero el programa de restitución no lo tiene en cuenta, la diferencia de altura que se obtendrá entre los centros de proyección y el terreno será la correspondiente a ignorar el factor de escala, que tiene un error, pero como la posición de los centros de proyección es correcta ese error se transmite al terreno, dando lugar a coordenadas $H$ con un error sistemático importante (en el ejemplo anterior 3m) (Fig. 3).

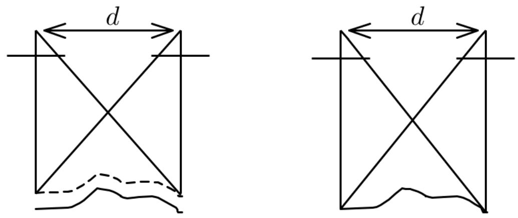



Fig. 3

La figura de la izquierda muestra lo que ocurre cuando en el cálculo de la orientación externa se aplica el factor de escala pero en la restitución no se tiene en cuenta de ninguna manera. El programa «cree» que los centros de proyección están a una distancia $d' = \sqrt{\Delta E^2 + \Delta N^2}$, cuando en realidad están a una distancia $d = \sqrt{\Delta E^2 + \Delta N^2}/k$ (en el dibujo $k < 1$). Al trabajar con una distancia menor que la real se obtienen unos incrementos de $H$ menores que los reales, pero como los centros de proyección se calcularon de forma correcta el resultado es un terreno elevado. El error es $(1-k)\Delta H^{\mathrm{c.p.}}_{\mathrm{terr.}}$ Además también está el error en los desniveles $(k-1)\Delta H$. En la figura de la derecha el factor de escala se tuvo en cuenta tanto en la orientación externa como en la restitución. Las coordenadas son correctas.

En la Tabla 1 se muestran los errores que se generan en cada caso según se aplique o no el factor de escala en la orientación externa y en la restitución.

| O.E. | Res. | Absoluto $(1-k)\Delta H^{c.p.}_{terr.}$ | Realtivo $(k-1)\Delta H$ |
|---|---|---|---|
| Sí | Sí | No | No |
| Sí | No | Sí | Sí |
| No | No | No | Sí |

Cuadro 1

Si las coordenadas están en algún sistema de proyección pero no sabemos cuál (!) o lo ignoramos estaremos cometiendo un error. Como este error da lugar a residuos en las coordenadas de los puntos de apoyo podría en teoría estimarse el valor de $k$ en el propio ajuste, siendo el valor estimado aquél con el cual los residuos fuesen menores. Para que esta estimación fuese fiable sería necesario unas diferencias de $H$ entre los puntos de apoyo considerables respecto a la altura de vuelo, mayores que las que se dan en la superficie terrestre, ese objeto plano un poco arrugado. Con observaciones GPS libres de error constante sí que tenemos las variaciones necesarias. Es habitual, y más con GPS, incluir en el ajuste parámetros adicionales (autocalibración). Uno de esos parámetros puede ser la propia focal. Este parámetro absorberá también el factor de escala, si no lo hemos tenido en cuenta en la transformación de las coordenadas, porque los efectos de ambos errores son idénticos.[2] Esto conlleva que un valor alejado de 1 (relativamente) de ese parámetro no debe interpretarse como un error en la focal de calibración. Si queremos saber cuál es la diferencia entre la focal calibrada y la estimada, tenemos que eliminar del parámetro calculado la parte correspondiente a $k$.

[2] Precisamente porque son idénticos, tampoco sin GPS libre de error constante puede estimarse una focal de manera fiable. Es necesario un objeto con más profundidad que la superficie terrestre.