Ajuste de Observaciones para Topógrafos

Ejercicios

Ajuste de observaciones para topógrafos. Ejercicios

Editor: Javier A. Múgica de Rivera
ISBN:
Primera edición, 2011

Impreso en
Impreso en España – Printed in Spain

Ajuste de Observaciones para Topógrafos

Ejercicios

Javier Múgica de Rivera

Diciembre de 2006

Índice

Nota explicativa

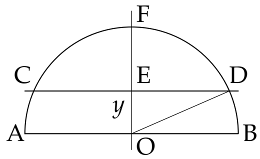
Este libro contiene los ejercicios correspondientes al título *Ajuste de observaciones para topógrafos,* y con frecuencia se hace referencia a él. Para identificarlas correctamente, las referencias al libro de teoría se escriben entre corchetes, mientras que las que apuntan al presente volumen se escriben normalmente. Así, [(10.3)] hace referencia a la ecuación (10.3) del libro de teoría, mientras que (10.1.2) se refiere a una ecuación de este libro; y análogamente para secciones, cuadros, etc.

En cada ejercicio los apartados se plantean todos al comienzo, aunque algunos necesitan breves explicaciones intermedias. Posteriormente se van resolviendo uno por uno. El comienzo de la solución a cada apartado se indica por la misma letra del apartado en negrita, por ejemplo ***a*)**. A menudo a la solución de un apartado sigue una explicación o análisis. Para distinguirlo claramente de la solución en sí esta se remata con □ y la explicación que sigue va en letra más pequeña. También se emplea ese símbolo al final del último apartado del ejercicio. Cuando un ejercicio no tenga apartados la solución simplemente se encuadra entre ➡ y □.

Los ejercicios o apartados difíciles, así como los que tienen por objeto desarrollar demostraciones que se omitieron en el libro de teoría, se indican con †. Este símbolo también se muestra al principio de cada párrafo de los que consta la solución de dichos apartados, para que puedan pasarse por alto fácilmente si así se desea.

1

1. Una ecuación



Sea un semicírculo de diámetro $\mathrm{AB} = 2$ y una recta r paralela a AB que corta al semicírculo en los puntos C y D. Determinar la posición de r para que divida al semicírculo en dos partes de igual área.

➡ El problema pide determinar la longitud $y = \mathrm{OE}$, siendo $\mathrm{OF} = 1$. La recta divide al semicírculo en dos regiones, de las cuales la inferior es ACDB, que es el doble de OEDB, y esta a su vez es el sector BOD más el triángulo OED.

$$\mathrm{BOD} = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} y, \qquad \mathrm{OED} = \tfrac{1}{2} y\sqrt{1-y^2},$$

ya que el ángulo BOD es igual a $\operatorname{arc\,sen} y$. Entonces el área de la región inferior es

$$\mathrm{ACDB} = \operatorname{arc\,sen} y + y\sqrt{1-y^2}.$$

El área superior es igual a la total del semicírculo menos esta: $\mathrm{CFDE} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{ACBD}$, y estas dos áreas han de ser iguales:

$$\operatorname{arc\,sen} y + y\sqrt{1-y^2} = \frac{\pi}{2} - \left(\operatorname{arc\,sen} y + y\sqrt{1-y^2}\right),$$
$$\operatorname{arc\,sen} y + y\sqrt{1-y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Escribimos la ecuación igualada a cero:

$$f(y) = \operatorname{arc\,sen} y + y\sqrt{1-y^2} - \frac{\pi}{4} = 0.$$

Resolvemos esta ecuación linealizando; es decir, sustituyendo f por una recta tangente a la curva en un punto cercano a la solución. Si la recta r cortase el radio OF a la mitad, el área inferior sería bastante mayor que la superior, así que podemos tomar como valor aproximado $y = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{1-y^2} - y\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-y^2} = 2\sqrt{1-y^2}, \end{aligned}$$

de donde la recta tangente a la función f en el punto $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ es

$$g(y) = f\left(\tfrac{1}{3}\right) + f'\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(y - \tfrac{1}{3}\right) \approx -0{,}1313 + 1{,}886\Delta y.$$

Igualando a cero obtenemos el valor $\Delta y \approx 0{,}070$; es decir, $y \approx 0{,}370$.

Este valor es solución para la recta g, no para la función f, como podemos comprobar sustituyendo: $f(0{,}370) = -0{,}063$. Realizamos otra iteración, tomando ahora como función g la recta tangente en el punto 0,370, y obtenemos

$$\begin{aligned} g(y) &\approx -0{,}063 + 1{,}995\Delta y, \\ \Delta y &\approx 0{,}0316, \end{aligned}$$

lo que da un nuevo valor $y \approx 0{,}4016$, para el cual $f(y) \approx -0{,}0043$. Tras una iteracion más obtenemos los valores

$$y \approx 0{,}40397, \qquad f(y) \approx -2{,}5 \cdot 10^6.$$

□

2. Un sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ln\tan x + x\sin y + x\cos z &= 2{,}1863 \\ x\cos y - x\sin z &= 0{,}05164 \\ y + z &= 1{,}5 \end{aligned}$$

tomando como valores aproximados $x = 1$ e $y = z$.

➡ El sistema linealizado en torno a un punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$\left(\frac{1}{\sin x \cos x} + \sin y + \cos z\right)_0 \Delta x + (x \cos y)_0 \Delta y$$
$$- (x \sin z)_0 \Delta z \approx 2{,}1863 - (f_1)_0$$
$$(\cos y - \sin z)_0 \Delta x - (x \sin y)_0 \Delta y - (x \cos z)_0 \Delta z \approx 0{,}05164 - (f_2)_0$$
$$\Delta y + \Delta z = 0,$$

en donde f_1 y f_2 son las expresiones que hay que hacer iguales a cero. Si los valores y_0 y z_0 se toman de manera que cumplan la tercera ecuación entonces $(f_3)_0 - 1{,}5 = 0$, y por eso ya no lo escribimos.

Con los valores aproximados propuestos el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{aligned} 3{,}61\Delta x + 0{,}73\Delta y - 0{,}68\Delta z &\approx 0{,}3299 \\ 0{,}05\Delta x - 0{,}68\Delta y - 0{,}73\Delta z &\approx 0{,}00159 \\ \Delta y + \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad .$$

Resolviendo el sistema se obtienen los valores:

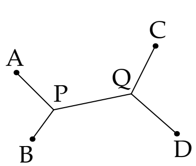
$$\Delta x \approx 0{,}099, \qquad \Delta y \approx -0{,}0685, \qquad \Delta z \approx 0{,}0685.$$

Tras realizar más iteraciones se llega finalmente a la solución

$$x \approx 1{,}1210, \qquad y \approx 0{,}6732, \qquad z \approx 0{,}8268.$$

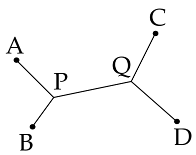
□

3. Un problema difícil



Este problema sirve para mostrar que el método de linealización también se puede emplear para resolver problemas que sí admiten solución exacta pero en las que ésta resulta difícil de obtener. En el conjunto de puntos representado se han efectuado las siguientes lecturas:

$$L_P^A = 102^g 23, \qquad L_P^B = 389^g 50, \qquad L_P^Q = 225^g 11,$$
$$L_Q^P = 58^g 71, \qquad L_Q^C = 200^g 00, \qquad L_Q^D = 306^g 33,$$



y las siguientes son coordenadas conocidas:

$$X_A = 10{,}1, \quad Y_A = 64{,}47, \quad X_B = 20{,}12,$$
$$Y_B = 22{,}72, \quad X_C = 96{,}94, \quad Y_C = 81{,}17,$$
$$X_D = 110{,}3, \quad Y_D = 26{,}06.$$

a) Obtener los puntos P y Q a partir de coordenadas aproximadas mediante un proceso iterativo.

† *b*) Resolver el problema de forma exacta por métodos geométricos.

a) Mediante un croquis podemos obtener los siguientes (u otros parecidos) valores aproximados:

$$X_{P0} = 33{,}5, \quad Y_{P0} = 41{,}1, \quad \Sigma_{P0} = 253^g4,$$
$$X_{Q_0} = 81{,}9, \quad Y_{Q_0} = 51{,}1, \quad \Sigma_{Q_0} = 232^g5.$$

La ecuación para la observación L_P^A, en radianes, es la siguiente:

$$\arctan\frac{Y_A - Y_P}{X_A - X_P} - \Sigma_P = 1{,}6058$$

Para los valores aproximados anteriores, la lectura obtenida es ${L_P^A}_0 = 1{,}5167$, por lo que la ecuación linealizada es

$$1{,}5167 + \frac{\partial L_P^A}{\partial X_P}\Delta X_P + \frac{\partial L_P^A}{\partial Y_P}\Delta Y_P + \frac{\partial L_P^A}{\partial \Sigma_P}\Delta\Sigma_P \approx 1{,}6058$$

Las derivadas de una lectura en función de los parámetros que intervienen se encuentran desarrolladas en el capítulo de ángulos y distancias. Una vez calculadas y sustituídos todos los valores la ecuación queda

$$-0{,}021\Delta X_P - 0{,}021\Delta Y_P - \Delta\Sigma_P \approx 0{,}0891$$

Las demás ecuaciones se obtinenen en modo análogo. Los valores aproximados de las lecturas y los términos independientes son, en radianes,

	L	L_0	$L - L_0$
L_P^A	5,5862	5,4971	0,0891
L_P^B	3,8155	3,7708	0,0446
L_P^Q	1,2332	1,3671	−0,1338
L_Q^P	4,5743	4,5086	0,0657

	L	L_0	$L - L_0$
L_Q^C	0,5105	0,4638	0,0467
L_Q^D	2,1807	2,2934	−0,1127

El sistema de ecuaciones al que se llega escrito en modo matricial es

$$\begin{pmatrix} -0{,}021 & -0{,}021 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0{,}036 & -0{,}026 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0{,}004 & 0{,}020 & 0{,}004 & -0{,}020 & -1 & 0 \\ -0{,}004 & 0{,}020 & 0{,}004 & -0{,}020 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0{,}027 & 0{,}013 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}017 & 0{,}020 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_P \\ \Delta Y_P \\ \Delta X_Q \\ \Delta Y_Q \\ \Delta \Sigma_P \\ \Delta \Sigma_Q \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0891 \\ 0{,}0446 \\ -0{,}1338 \\ 0{,}0467 \\ -0{,}1127 \\ 0{,}0657 \end{pmatrix};$$

y la solución

$$\Delta X_P \approx -1{,}43, \qquad \Delta Y_P \approx -8{,}23, \qquad \Delta \Sigma_P \approx 0{,}1175,$$
$$\Delta X_Q \approx -2{,}49, \qquad \Delta Y_Q \approx -7{,}63, \qquad \Delta \Sigma_Q \approx -0{,}0819.$$

Esta solución proporciona los nevos valores

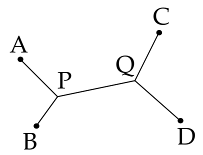
$$X_{P1} \approx 32{,}07, \qquad Y_{P1} \approx 32{,}87, \qquad \Sigma_{P1} \approx 260^g 88,$$
$$X_{Q_1} \approx 79{,}41, \qquad Y_{Q_1} \approx 43{,}47, \qquad \Sigma_{Q_1} \approx 227^g 28.$$

Dado lo grande de algunos incrementos es necesario volver a calcular la matriz del sistema para la próxima iteración. Resulta la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -0{,}021 & 0{,}015 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0{,}041 & 0{,}049 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0{,}005 & 0{,}020 & 0{,}005 & 0{,}020 & -1 & 0 \\ -0{,}005 & 0{,}020 & 0{,}005 & 0{,}020 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}022 & 0{,}010 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}014 & 0{,}025 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los siguientes incrementos y valores aproximados son

$$\Delta X_P \approx -1{,}56, \qquad \Delta Y_P \approx 0{,}17, \qquad \Delta \Sigma_P \approx 0{,}0025,$$
$$\Delta X_Q \approx 0{,}41, \qquad \Delta Y_Q \approx 0{,}47, \qquad \Delta \Sigma_Q \approx 0{,}0025;$$
$$X_{P2} \approx 30{,}51, \qquad Y_{P2} \approx 33{,}04, \qquad \Sigma_{P2} \approx 261^g 05,$$
$$X_{Q_2} \approx 79{,}82, \qquad Y_{Q_2} \approx 43{,}94, \qquad \Sigma_{Q_2} \approx 227^g 45.$$



El mayor incremento en una incógnita en esta iteración es $-1{,}56$. Un metro y medio frente a más de veinte (las distancias de los puntos visados desde P) apenas altera la geometría, y no es necesario volver a calcular la matriz del sistema ni su inversa, y para sucesivas iteraciones podemos emplear la misma, aunque la convergencia será algo más lenta. Finalmente la solución es

$$X_P = 30{,}59, \qquad Y_P = 33{,}02, \qquad \Sigma_P = 261^g 02,$$
$$X_Q = 79{,}83, \qquad Y_Q = 43{,}92, \qquad \Sigma_Q = 227^g 42.$$

† ***b)*** Para resolver geométricamente el problema comenzamos trazando los arcos capaces APB y CQD. Después obtenemos los puntos E y F como se muestra en la figura 1.3.1. El ángulo COE es doble del ángulo CQE, que es conocido, lo que permite situar el punto E. De la misma manera situamos el punto F. La intersección del segmento EF con las circunferencias proporciona los puntos P y Q.

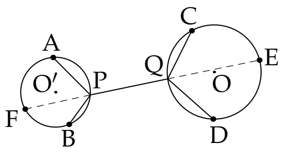


Fig. 1.3.1: Resolución geométrica

∎

3

1. Medidas de los ángulos de un triángulo

Este ejercicio consiste en la simulación de las medidas de los ángulos de un triángulo suponiendo una distribución uniforme de los errores, y en la observación de los valores que se obtendrían. Para ello, seleccionar primero tres valores que sumen 180°, por ejemplo 30°, 60° y 90°, y seleccionar también un intervalo para la distribución uniforme, por ejemplo $\pm 0{,}5°$. A continuación se genera un error para cada ángulo de manera aleatoria siguiendo la distribución uniforme (una posibilidad habitual en herramientas de cálculo) y se suman los errores generados a los ángulos, obtiendo los valores observados simulados: ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Se obtiene el error total $\varepsilon = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - 180$, y la corrección a aplicar a cada medida para obtener el valor ajustado es $-\varepsilon/3$. Se obtendrán así unos valores l_1, l_2, l_3 que cumplen $l_1 + l_2 + l_3 = 180$, pero que son lógicamente distintos de $30, 60, 90$. Realizar esta simulación muchas veces (más de cien) y representar gráficamente los valores de las distintas magnitudes que se obtienen. La representación en el plano de los pares (l_1, l_2) será parecida a [Fig. 3.6].

2. Simulación con función de densidad asimétrica

Supongamos una función de densidad

$$f(\ell) \propto \ell - \ell^3, \qquad 0 \leq \ell \leq 1, \tag{3.2.1}$$

para un valor real $\mathrm{l} = 0{,}5$.

a) Calcular la constante que falta para que sea efectivamente una función desidad.

b) Hallar media, mediana y el valor de máxima densidad (moda).

Para los siguientes apartados es necesario generar valores siguiendo la distribución f. Para ello se generan aleatoriamente valores entre 0 y 1 siguiendo una distribución uniforme y al valor obtenido se le aplica F^{-1}. Así, si α sigue una distribución uniforme, $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces $F^{-1}(\alpha)$ sigue la distribución f.

c) ¿Por qué de esta manera se generan cantidades que siguen la distribución f?
d) Calcular la función F^{-1}.

Sea la variable M igual a «el valor máximo de tres cantidades que siguen una distribución f». En [p. 23] se demuestra que $F_M(x) = F(x)^3$. Vamos a comprobarlo experimentalmente. Para ello generaremos mil valores M; es decir, repetiremos mil veces el proceso de generar tres cantidades $\ell \sim f$ y tomar el valor máximo. Creamos también un conjunto de cien valores, sin más que tomar los cien primeros del conjunto de mil.

e) Calcular $F_M(x)$ y $f_M(x)$.
f) Representar $f_M(x)$ y los conjuntos de valores obtenidos en la simulación, y compararlos.

Sea $U_0(x)$ la función de distribución de los mil valores y $U_1(x)$ la de cien.

g) Representar superpuestas $U_0(x)$, $U_1(x)$ y $F_M(x)$.
h) Para algunos valores α obtener F_M^{-1}, U_0^{-1} y U_1^{-1}.

Las siguientes simulaciones consisten en obtener a partir de tres medidas una estimación del valor real. Estudiemos en primer lugar la distribución de algunos estimadores:

i) Generar doscientas veces un conjunto de tres medidas, para cada uno de ellos calcular la media y representar el conjunto de medias.
j) Ídem para la mediana.
k) ¿Hacia qué valor tiende la media de las medias?
† *l*) ¿Y de las medianas?

Los siguientes apartados ya están relacionados con la estimación, es decir, con la función g. Supongamos que la función f se desplaza con los valores reales y que a priori todos los valores reales tienen la misma probabilidad.

m) Escribir $f_l(\ell)$.

n) Si los valores observados son $\ell_1 = 0{,}15$, $\ell_2 = 0{,}25$ y $\ell_3 = 0{,}5$, calcular y representar una función proporcional a $g(\mathfrak{l})$.

ñ) Obtener el intervalo de confianza del 95 % de probabilidad centrado en 0,27.

o) Obtener la función g en el caso de que $f_{\mathfrak{l}}$ se escale con $\mathfrak{l}$, y continuando con la suposición de que todos los valores reales son igual de probables.

p) Ídem en el caso de que los valores reales sigan una distribución proporcional a $h(\mathfrak{l}) = 1/\mathfrak{l}$. Representar superpuestas ambas gráficas (tener cuidado de hacerlo a la misma escala).

q) Obtener en ambos casos el intervalo de probabilidad 90 % que comience en 0,25, así como el valor ajustado correspondiente a dicho intervalo.

a)

$$\int_0^1 \ell - \ell^3 \,\mathrm{d}\ell = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

de donde la constante pedida es 4, y $f(\ell) = 4\ell - 4\ell^3$.

b) La media es

$$\mu = \int_0^1 \ell f(\ell) \,\mathrm{d}\ell = \left[\tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{4}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{8}{15} = 0{,}53.$$

La mediana es $\mathrm{F}^{-1}(0{,}5)$, el valor comprendio entre 0 y 1 que satisface

$$2m^2 - m^4 = \frac{1}{2}.$$

Esta es una ecuación de segundo grado en m^2, y su solución es

$$m = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 0{,}5412.$$

La moda es el máximo de f, el valor que cumple

$$f'(m') = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 3m'^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m' = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577.$$

□

Se cumple por lo tanto $\mu < m < m'$. Esta posición de la media entre la moda y la mediana es típica de distribuciones asimétricas.

***c*)** Una explicación gráfica puede verse en [Fig. 15.9]. En torno a un valor α, cuanto mayor sea la pendiente de la gráfica de F mayor es la densidad de valores $\mathrm{F}^{-1}(\alpha)$. Llamando g a la función de densidad de los valores $\mathrm{F}^{-1}(\alpha)$, tenemos entonces que $g(x) \propto \mathrm{F}'(x)$. Pero $\mathrm{F}'(x) = f(x)$, de donde $g(x) \propto f(x)$, y dado que tanto g como f son funciones de densidad se cumple $g = f$.

Una desmostración alternativa se puede obtener mediante el siguiente razonamiento: Si a un valor α de la distribución uniforme de intervalo $[0, 1]$ se le asigna $x = \mathrm{F}^{-1}(\alpha)$, a cualquier $\beta \leq \alpha$ le corresponde $t = \mathrm{F}^{-1}(\beta) \leq x$. Si consideramos α fijo, la probabilidad de $\beta \leq \alpha$ es $\mathrm{P}(\beta \leq \alpha) = \alpha$, de modo que se cumple $\mathrm{P}(t \leq x) = \alpha$. Si llamamos g a la función de densidad de los valores x que generamos, y G a la función de distribución, se cumple pues $\mathrm{G}(x) = \alpha$. Pero también $\mathrm{F}(x) = \alpha$, de donde $\mathrm{G} = \mathrm{F}$ y $g = f$.

***d*)** La función $\mathrm{F}(x)$ es $\mathrm{F}(x) = 2x^2 - x^4$. Para hallar $\mathrm{F}^{-1}(\alpha)$ tenemos que despejar x en $\alpha = 2x^2 - x^4$. Esta es una ecuación de segundo grado en x^2 que da como solución $x^2 = 1 - \sqrt{1-\alpha}$, de donde

$$x = \sqrt{1 - \sqrt{1-\alpha}}$$

***e*)** $\mathrm{F_M}(x) = (2x^2 - x^4)^3 = -x^{12} + 6x^{10} - 12x^8 + 8x^6$,
$f_\mathrm{M}(x) = \mathrm{F}'_\mathrm{M}(x) = -12x^{11} + 60x^9 - 96x^7 + 48x^5$.

***f,g*)** En la página siguiente se muestran dos figuras. En la primera de ellas aparece representada la función de densidad $f_\mathrm{M}(x)$ y bajo ella los dos conjuntos de valores obtenidos. En la segunda están representadas superpuestas $\mathrm{U}_1(x)$, $\mathrm{U}_0(x)$ y $\mathrm{F_M}(x)$. Puede verse que las diferencias entre estas dos últimas funciones son mínimas. Sin embargo con cien valores todavía existen diferenicas apreciables.

***h*)** Los valores $\mathrm{F}_\mathrm{M}^{-1}(\alpha)$ se pueden obtener gráficamente o despejando α en $\alpha = \mathrm{F_M}(x) = \mathrm{F}^3(x)$, de donde $\sqrt[3]{\alpha} = \mathrm{F}(x)$, y se obtiene

$$x = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt[3]{\alpha}}}.$$

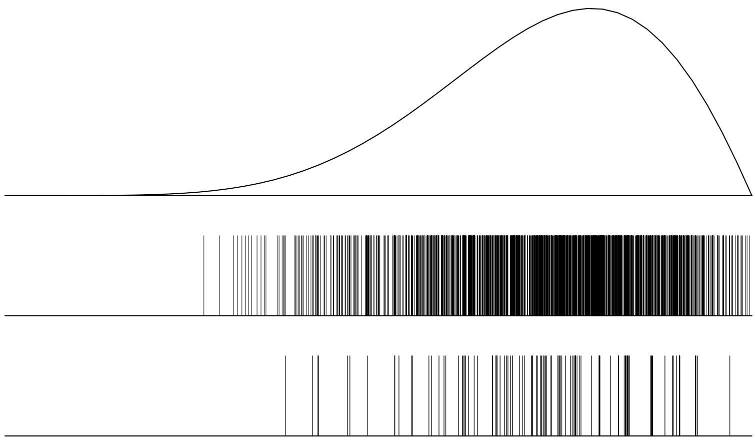


Fig. 3.2.1: Distribución de los valores M

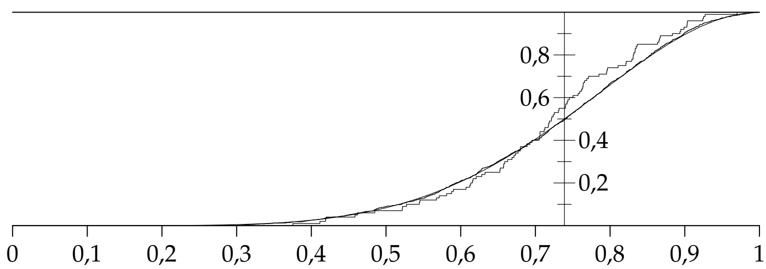


Fig. 3.2.2: Distribuciones teórica y empíricas de M

Las mayores diferencias entre F_M^{-1} y U_1^{-1} se dan para $\alpha = 0{,}69$ y $\alpha = 0{,}83$, y son respectivamente 0,042 y 0,034. □

i,j) Véase las gráficas en la página siguiente. Se aprecia claramente que la media tiene menos dispersión que la mediana.

k) La media de las medias es simplemente la media de todos los valores, y tiende por lo tanto al valor medio de la distribución, 0,52.

† ***l)*** Para obtener la media de las medianas primero tendremos que obtener su distribución. Sean ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 las medidas y m la mediana. La

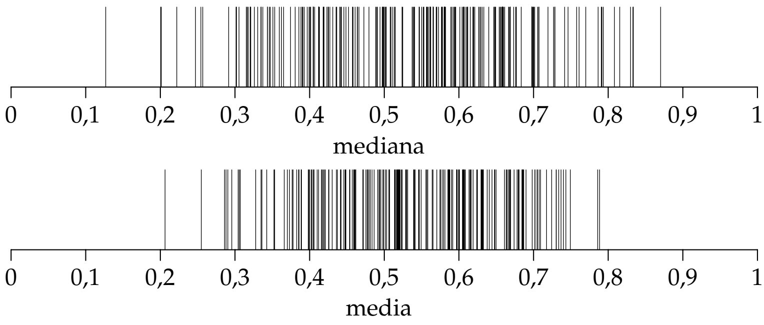


Fig. 3.2.3: Distribución de la media y la mediana de tres valores

probabilidad de que m sea un valor concreto x es cero, pero podemos calcular la probabilidad de que esté en un entorno muy pequeño de un cierto valor x. Sea I_Δ un intervalo de longitud Δ que contiene a x. La probabilidad $P(m \in I)$ es la suma de las probabilidades de cada una de las siguientes posibilidades:

1. $\ell_1 \in I_\Delta$, y los otros dos valores están cada uno a un lado de ℓ_1.
2. $\ell_2 \in I_\Delta$, y los otros dos valores están cada uno a un lado de ℓ_2.
3. $\ell_3 \in I_\Delta$, y los otros dos valores están cada uno a un lado de ℓ_3.

† La probabilidad de $\ell \in I_\Delta$ es prácticamente igual a $f(x)\Delta$. La probabilidad de que un valor sea menor que x es $F(x)$, y la de que sea mayor es $1 - F(x)$. Así, se tiene que

$$P(\ell_1 \in I_\Delta, \ell_2 < x, \ell_3 > x) \approx \Delta f(x) F(x)\big(1 - F(x)\big),$$

y la misma probabilidad para $\ell_3 < x$, $\ell_2 > x$. La probabilidad total es entonces:

$$P(m \in I_\Delta) \approx 6\Delta f(x) F(x)\big(1 - F(x)\big). \qquad (3.2.2)$$

† Las razones por las que (3.2.2) no es una igualdad son las siguientes:

- $P(\ell \in I_\Delta)$ no es exactamente $\Delta f(x)$.
- Si $\ell_i \in I_\Delta$, la probabilidad $\ell_j < \ell_i$ no es exactamente $F(x)$, sino que será $F(\ell_i)$, y análogamente para $\ell_j > \ell_i$.

Pero según $\Delta \to 0$ el error en la aproximación (3.2.2) debido a estas causas es cada vez más pequeño en relación a la propia probabilidad $P(m \in I_\Delta)$, de modo que se cumple

$$\lim_{\Delta \to 0} P(m \in I_\Delta)/\Delta = 6f(x)F(x)\big(1 - F(x)\big).$$

† Esta es precisamente la definición de densidad de probabilidad, y por lo tanto

$$f_m(x) = 6f(x)F(x)\big(1 - F(x)\big). \tag{3.2.3}$$

† Esta es ya una función de densidad, pero es habitual en un proceso de obtención de una función de densidad olvidarse alguna constante por el camino, así que no está de más comprobar que su integral es 1. De hecho a veces es más cómodo olvidarse de las constantes en el desarrollo y calcular al final la que falta integrando.
† Para resolver la integral no es necesario sustituir las funciones f y F. Sean cuales sean se cumple

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} 6f(x)F(x)\big(1 - F(x)\big)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(6f(x)F(x) - 6f(x)F^2(x)\big)dx \\ &= 3F^2(x) - 2F^3(x) = 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

† Los problemas de cálculo de distribuciones derivadas de otras se pueden resolver buscando la función de densidad o la función de distribución. En este caso hemos seguido el primer camino, pero también podemos llegar a la función de distribución directamente. La probabilidad $F_m(x)$ de que la mediana m sea menor o igual que un valor x es la de que dos de las medidas sean menores o iguales que x. Existen cuatro posibilidades mutuamente excluyentes: I) $\ell_1, \ell_2 \leq x$, $\ell_3 > x$; las otras dos combinaciones, y IV) $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \leq x$. Sumando las probabilidades de cada caso se obtiene

$$F_m(x) = 3F^2(x)\big(1 - F(x)\big) + F^3(x) = 3F^2(x) - 2F^3(x).$$

† Los dos caminos se pueden generalizar fácilmente a un número $N = 2n + 1$ impar de medidas.

$$\begin{aligned} f_{m_N}(x) &= f(x)F^n(x)\big(1 - F(x)\big)^n, \\ F_{m_N}(x) &= \sum_{k=n+1}^{N} \binom{N}{k} F^k(x)\big(1 - F(x)\big)^{N-k}. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

† Volviendo al caso que nos ocupa, la esperanza de m es

$$\mathrm{E}[m] = \int_{-\infty}^{\infty} x6f(x)\mathrm{F}(x)\big(1-\mathrm{F}(x)\big)\mathrm{d}x.$$

Esta integral ya no la podemos calcular de manera genérica para cualquier f. Sustituyendo la función de este ejercicio resulta un polinomio, cuya integranción es inmediata:

$$\mathrm{E}[m] = \int_{-1}^{1} 24(2x^4 - 7x^6 + 9x^8 - 5x^{10} + x^{12})\mathrm{d}x = \frac{384}{715} \approx 0{,}537,$$

valor que está entre la mediana y la media de la distribución original, como es lógico.

m) $f_{\mathfrak{l}}(\ell) = 4(\ell + 0{,}5 - \mathfrak{l}) - 4(\ell + 0{,}5 - \mathfrak{l})^3$.

n) $g(\mathfrak{l}) \propto f_{\mathfrak{l}}(0{,}15)f_{\mathfrak{l}}(0{,}15)f_{\mathfrak{l}}(0{,}5) =$

$\mathfrak{l}(\mathfrak{l}^2 - 3\mathfrak{l} + 2)(4\mathfrak{l}^2 - 5{,}6\mathfrak{l} + 1{,}95)(4\mathfrak{l}^2 - 6\mathfrak{l} - 1{,}75)(4\mathfrak{l}^2 - 5{,}2\mathfrak{l} - 2{,}31)$.

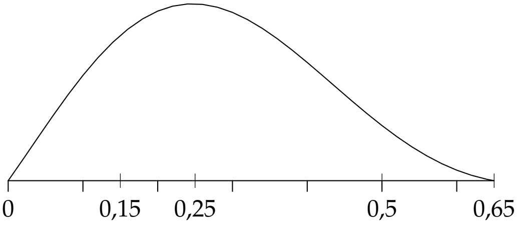


Fig. 3.2.4: Función $g_{0{,}15,\,0{,}25,\,0{,}5}(\mathfrak{l})$

ñ) Para obtener intervalos de una cierta probabilidad primero tenemos que calcular la constante que falta en la función proporcional a g para que sea igual a g. Evaluando la integral se obtiene el valor 0,9508, por lo que la constante que falta es $0{,}9508^{-1} = 1{,}052$. Así,

$$g = 1{,}052\mathfrak{l}(\mathfrak{l}^2 - 3\mathfrak{l} + 2)\cdots$$

El intervalo centrado en 0,27 de probabilidad 95 % es la solución a

$$\int_{0{,}27-h}^{0{,}27+h} g(\mathfrak{l})\mathrm{d}\mathfrak{l} = 0{,}95.$$

Llegados a este punto resulta conveniente disponer de una herramienta de cálculo simbólico, ya que si bien el desarrollo del producto de la función g no entraña ninguna dificultad, es un proceso largo y propenso a la comisión de errores. Una vez desarrollada la función g su integral es inmediata por tratarse de un polinomio. En el polinomio que resulta al integrar, la substitución de $(0{,}27 + h)$ y $(0{,}27 - h)$ y el posterior desarrollo requiere aún más operaciones, y una herramienta informática resulta imprescindible. El resultado que se obtiene es el siguiente.

$$\mathrm{P}(h) = -71{,}35h^9 - 19{,}59h^7 + 70{,}83h^5 - 31{,}1h^3 + 5{,}51h = 0{,}95$$

Esta ecuación la podemos resolver de manera iterativa, linealizando, como se explicó en el capítulo 1. Mirando la gráfica podemos obtener un valor inicial bastate preciso. Un valor $h = 0{,}2$ daría lugar a al intervalo $[0{,}07, 0{,}47]$, que parece que a la derecha deja demasiada área como para poder contener el 95 %. Parece más adecuado tomar 0,23, que se corresponde con el intervalo $[0{,}04, 0{,}5]$. Partiendo de un valor tan cercano a la solución la convergencia será muy rápida. No hay que perder nunca la noción de lo que estamos calculando, y la amplitud de un intervalo de confianza no es algo que requiera muchas cifras significativas. Para $h_0 = 0{,}23$, en una iteración obtenemos los siguientes valores:

$$\mathrm{P}(h_0) = 0{,}935, \quad \mathrm{P}'(h_0) = 1{,}55, \quad \Delta h = \frac{0{,}015}{1{,}55} = 0{,}10, \quad h_1 = 0{,}24,$$

y $\mathrm{P}(h_1) = 0{,}949$, por lo que podemos dar por terminado el proceso.

o,p) Primero debemos obtener la función $f_{\mathfrak{l}}(\ell)$. El razonamiento, literal y gráfico, se muestran en [p. 29].

$$f_{\mathfrak{l}}(\ell) = \tfrac{0{,}5}{\mathfrak{l}}\, f_{0{,}5}\big(\tfrac{0{,}5}{\mathfrak{l}}\ell\big) = \frac{\mathfrak{l}^2\ell - \frac{1}{4}\ell^3}{\mathfrak{l}^4}, \qquad 0 < \ell < 2\mathfrak{l}.$$

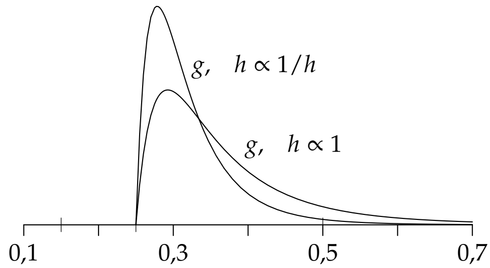
Si $h(\mathfrak{l}) \propto 1$ se llega a

$$g(\mathfrak{l}) \propto \frac{(4{,}8\mathfrak{l}^2 - 0{,}027)(8\mathfrak{l}^2 - 0{,}125)(16\mathfrak{l}^2 - 1)}{\mathfrak{l}^{12}},$$

mientras que si $h(\mathfrak{l}) \propto 1/\mathfrak{l}$,

$$g(\mathfrak{l}) \propto \frac{(4{,}8\mathfrak{l}^2 - 0{,}027)(8\mathfrak{l}^2 - 0{,}125)(16\mathfrak{l}^2 - 1)}{\mathfrak{l}^{15}}.$$

Al cumplirse $0 < \ell < 2\mathrm{l}$, dada una observación ℓ el valor real ha de cumplir $\ell/2 < \mathrm{l} < \infty$; es decir, $\mathrm{l} > \ell/2$, y esta condición ha de cumplirse para todos los valores observados. En nuestro caso esto significa $\mathrm{l} > 0{,}25$. Las gráficas son las siguientes:



q) El proceso para la obtención de los intervalos de confianza es el mismo que en el caso anterior. Los resultados son

$$[0{,}25, 0{,}50] \quad \text{y} \quad [0{,}250, 0{,}395].$$

Tratándose de una variable de tipo escala, la manera de que el valor ajustado esté centrado en el intervalo es situándolo en la media geométrica. Esto nos da las siguientes soluciones para $p = 90\,\%$:

$$\mathrm{l} = 0{,}354 \times\!\!/\ 1{,}4, \qquad \mathrm{l} = 0{,}314 \times\!\!/\ 1{,}26.$$

□

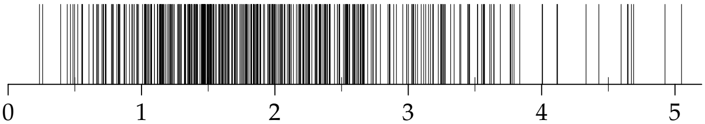
3. Diferencia entre los valores máximo y mínimo observados

Sea una magnitud cuya observación sigue la distribución $f(\ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\ell^2/2}$, para un valor verdadero $\mathrm{l} = 0$. Para generar valores aleatorios siguiendo esta distribución por el método de F^{-1} debemos tener la posibilidad de calcular F^{-1}. La distribución es la normal de media 0 y desviación típica 1, y su función F^{-1} suele existir en las aplicaciones de cálculo estadístico.

a) Generar entre 200 y 1000 veces un conjunto de cuatro observaciones, tomar para cada conjunto la diferencia entre los valores extremos y representarlo.

b) Supongamos que hemos medido varias magnitudes de valor desconocido pero que sabemos (o suponemos) que siguen distribuciones normales de igual desviación típica, desconocida. Para cada magnitud realizamos cuatro medidas y queremos estimar de manera rápida la desviación típica en base a la diferencia entre los valores extremos de las medidas de cada magnitud. ¿Cómo debemos proceder?

***a*)**



***b*)** La media de los valores en esta simulación es 2,00. El lector en su simulación obtendrá lógicamente un valor ligeramente distinto. Si la distribución normal de partida tuviese desviación típica σ la media sería entonces $2{,}00\sigma$. Por lo tanto podemos obtener σ a partir de las difierencias entre los valores extremos dividiendo por dos la media de dichas diferencias. □

4

1. Distribución de los errores de nivelación

Es habitual en nivelaciones en las que sólo se anota hasta el milímetro que el mayor error en cada observación sea el debido al redondeo al milímetro. Suponiendo que siempre se redondee al valor más próximo,

a) ¿qué distribución sigue ese error?
b) En un tramo de n niveladas (cada nivelada consta de dos observaciones), aproximar la distribución del error total por una distribución normal.
c) ¿Cuál es, aproximadamente, la probabilidad de que una línea cerrada de nivelación de 12 niveladas cierre con un error de 0 o 1 mm?

† *d*) Contrastar el valor calculado con el obtenido mediante un conjunto grande de simulaciones.
e) ¿Que pasa en el anterior razonamiento si $s \in (\mathbb{Z} + 0{,}5)$?

a) Si el valor real está justo por encima de un medio milímetro se redondeará al valor por exceso, y el error es 0,5. Si el valor es algo mayor el error por redondeo disminuye, llegando a ser cero en el caso de que el valor real sea exactamente un número entero de milímetros. Si es todavía mayor, se redondeará por defecto y el error es negativo. Según se aproxima el valor real a una cantidad exacta de milímetros más medio milímetro, el error tiende a $-0{,}5$. La situación del valor real respecto a las divisiones de milímetro es aleatoria, y en resumen la distribución del error de redondeo es uniforme entre $-0{,}5$ y 0,5.

b) La desviación típica de una distribución uniforme de base 1 es $1/\sqrt{12}$. La suma de variables iguales tiende muy rápido a la normal (cf. [Cap. 6]). Por otra parte, la suma de $2n$ observaciones independientes de desviación típica σ tiene desviación típica $\sqrt{2n}\,\sigma$. Por lo tanto el error en n niveladas se apoxima a una distribución $\mathrm{N}(0, \sqrt{n/6})$.

c) La distribución del error de una línea de 12 niveladas será aproximadamente $\mathrm{N}(0, \sqrt{2})$. Sin embargo una línea cerrada no es una línea cualquiera. El desnivel total sabemos que es cero, y error será exactamente un número entero de milímetros. Si el número de niveladas fuese muy grande el hecho de que el conjunto de posibles valores sea discreto no afectaría mucho a la probabilidad de un conjunto. Por ejemplo, para un número muy alto de niveladas, la probabilidad de que el error de cierre ε_c esté en el conjunto $[-10, 10]$ vendrá dada de manera bastante precisa por la distribución normal. Pero en el caso de 12 niveladas, en el que la desviación típica para una línea no cerrada sería sólo $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, el hecho de que los posibles valores sean números enteros altera significativamente la distribución. Así que no queda más remedio, si queremos calcular la probabilidad mediante la distribución normal, que asumir que el valor obtenido puede tener un error importante (aunque en el apartado siguiente veremos que el error cometido es en realidad pequeño).

La probablidad aproximada mediante la distribución normal la obtendremos como la contenida en un intervalo $[-y, y]$, en donde y puede ser cualquier valor contenido en $[1, 2)$, ya que todos ellos contienen exactamente los número enteros -1, 0 y 1. Parece lo más lógico (diríamos que por instinto) tomar el valor medio; es decir,

$$\mathrm{P}\left(x \sim \mathrm{N}(0, \sqrt{2}) \in [-1{,}5, 1{,}5]\right),$$

que es igual a

$$\mathrm{P}\Big(x \sim \mathrm{N}(0, 1) \in [-1{,}06, 1{,}06]\Big) = 0{,}71.$$

□

El error de este valor, aunque sea importante, no lo será tanto como para que el valor real sea una probabilidad pequeña. Esto pone de manifiesto que la tan habitual «casualidad» de cerrar una nivelación con uno o ningún milímetro de error no es en realidad una casualidad.

† ***d)*** La dificultad de este apartado radica en realizar correctamente la simulación. No podemos generar 24 errores aleatorios siguiendo una distribución uniforme, ya que los valores han de estar sujetos a la condición de que su suma sea un número entero. Sí que podemos generar 23, ya que hasta esa observación inclusive todos los errores son independendientes. La suma de esos 23 errores será un valor s.

Resulta fácil ver que el valor de s determina el error en la observación final, ε_{24}, ya que este valor cumple simultáneamente $-0{,}5 < \varepsilon_{24} < 0{,}5$ y $s + \varepsilon_{24} \in \mathbb{Z}$. Si el lector no lo ve, que dé posibles valores a s: la conclusión es inmediata. Lo que interesa ahora es el error de cierre, así que una vez obtenido s, el error de cierre es el entero más próximo a s. † Si se realiza la simulación se comprueba que la probabilidad de $-1 \leq \varepsilon_c \leq 1$ es 0,725. La aproximación mediante la normal no era entonces mala.

***e*)** Esta (im)posiblidad tiene probabilidad cero, por lo que no afecta en nada. □

† 2. La constante de la distribución normal

La distribución normal viene dada por $\mathrm{N}(0,1) \propto e^{-x^2/2}$. La integral de esta exponenecial no es expresable en términos de funciones elementales. Sí que se puede sin embargo calcular el valor exacto de la integral entre $-\infty$ e ∞. En este ejercicio se propone al lector una manera de obtener dicha integral.

a) Obtener la expresión de la función χ^2_1, en donde la constante permanecerá como incógnita.
b) Obtener la expresión de χ^2_2.
c) χ^2_2 es fácilmente integrable. Integrar la función y con ello obtener la constante.

***a*)** Escribimos $\mathrm{N}(0,1) = ke^{-x^2/2}$, en donde k es la constante que tenemos que obtener. La función χ^2_1 no es más que la distribución normal con el cambio de variable $x^2 \mapsto x$. Para evitar confusión emplearemos la variable t en la normal.

Conviene introducir una notación que ahorrará tener que hacer referencias constantes a «cuando $\Delta \to 0$ el error en la igualdad es despreciable respecto a la magnitud de los igualados»: $f(x) \asymp g(x)$ querrá decir $\lim_{x\to 0} f/g = 1$.*

Para un valor cualquiera x sea $\mathrm{I}_{x,\Delta}$ un intervalo de longitud Δ que contiene a x. Se cumple

$$\mathrm{P}\big(z \sim \chi^2_1 \in \mathrm{I}_{x,\Delta}\big) \asymp \Delta\chi^2_1(x).$$

*Para este fin suele emplearse el signo $\sim$, que nosotros ya empleamos para indicar «sigue la distribución». El símbolo $\asymp$ tiene normalmente otro significado distinto.

Podemos expresar esta probabilidad en relación a la distribución normal original. Sea $t = +\sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big(z \sim \chi_1^2 \in \mathrm{I}_{x,\Delta}\big) &= \mathrm{P}\big(z \sim \mathrm{N}(0,1) \in \mathrm{I}_{t,\delta}\big) + \mathrm{P}\big(z \sim \mathrm{N}(0,1) \in \mathrm{I}_{-t,\delta}\big)\\ &= 2\mathrm{P}\big(z \sim \mathrm{N}(0,1) \in \mathrm{I}_{t,\delta}\big);\end{aligned}$$

a su vez

$$\mathrm{P}\big(z \sim \mathrm{N}(0,1) \in \mathrm{I}_{t,\delta}\big) \asymp \delta \mathrm{N}_{(0,1)}(t),$$

y por lo tanto

$$\Delta\chi_1^2(x) \asymp 2\delta \mathrm{N}_{(0,1)}(t).$$

La relación entre Δ y δ viene dada por

$$\delta \asymp \frac{\Delta}{2\sqrt{x}},$$

y finalmente

$$\chi_1^2(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}}\mathrm{N}_{(0,1)}(t) = k\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x/2}.$$

$\square$

Antes de continuar podemos formular de manera general la relación entre las funciones de densidad de dos variables relacionadas, que acabamos de obtener aplicándolo al caso particular $x = t^2$. Sea f la función de densidad de t, conocida, $x = h(t)$ (de donde $t = h^{-1}(x)$), y g la función de densidad de x.

$$g(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} f(h^{-1}(x)). \tag{4.2.1}$$

b) La función χ_2^2 viene definida por

$$\mathrm{P}\big(z \sim \chi_2^2 \in \mathrm{I}_{x,\Delta}\big) \asymp \Delta\chi_2^2(x).$$

Si tanto z_1 como z_2 siguen una χ_1^2, se cumple por definición

$$\mathrm{P}\big(z \sim \chi_2^2 \in \mathrm{I}_{x,\Delta}\big) = \mathrm{P}\big(z_1 + z_2 \in \mathrm{I}_{x,\Delta}\big).$$

El valor de esta última cuando $\Delta \to 0$ es

$$\int_0^x \chi_1^2(z_1)\chi_1^2(x - z_1)\Delta\, \mathrm{d}z_1.$$

El integrando es

$$k^2 \frac{1}{\sqrt{z_1(x-z_1)}} e^{\frac{-z_1-(x-z_1)}{2}} \Delta = \Delta k^2 e^{-x/2} \frac{1}{\sqrt{z_1(x-z_1)}}.$$

Así pues

$$\Delta \chi_2^2(x) \asymp \Delta k^2 e^{-x/2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{z_1(x-z_1)}} \, \mathrm{d}z_1.$$

Para calcular la integral en primer lugar expresamos el producto $z_1(x-z_1)$ de manera simétrica repecto al centro del intervalo $[0, x]$:

$$z_1(x-z_1) = \left(\tfrac{x}{2} - d\right)\left(\tfrac{x}{2} + d\right),$$

y la integral queda

$$\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x/2)^2 - d^2}} \, \mathrm{d}d.$$

En esta integral hacemos el habitual cambio de variable $d = \frac{x}{2} \sin \alpha$, de donde $\mathrm{d}d = (x/2) \cos \alpha \, \mathrm{d}\alpha$. Los límites de integración son $-\pi/2$ y $\pi/2$, y la integral queda

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{x}{2} \cos \alpha}{\frac{x}{2} \cos \alpha} \, \mathrm{d}\alpha = \pi.$$

Hemos llegado a $\chi_2^2(x) = k^2 \pi e^{-x/2}$.

c) La integral de esta función es inmediata:

$$\int_0^\infty \chi_2^2 = \left[-2\pi k^2 e^{-x/2}\right]_0^\infty = 2\pi k^2.$$

Esta integral es igual a 1 por ser la de una función de densidad, y finalmente el valor de k es

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

□

† 3. Las funciones χ_n^2

a) Obtener χ_4^2 a partir de χ_2^2 en modo análogo a como se obtuvo χ_2^2 a partir de χ_1^2 en el ejercicio anterior.

b) Generalizar el proceso a la obtención de χ_{2n}^2 a partir de χ_{2n-2}^2, y obtener una fórmula explícita para χ_{2n}^2.

c) Obtener χ_3^2 a partir de χ_1^2 y generalizarlo para obtener un fórmula para χ_{2n+1}^2.

a)

$$\chi_4^2(x) = \int_0^x \chi_2^2(z)\chi_2^2(x-z)\mathrm{d}z = \int_0^x \tfrac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}\tfrac{1}{2}e^{-\frac{x-z}{2}}\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^x \tfrac{1}{4}e^{-x/2}\,\mathrm{d}z = \frac{x}{4}\,e^{-x/2}.$$

b)

$$\chi_6^2(x) = \int_0^x \chi_2^2(z)\chi_4^2(x-z)\mathrm{d}z = \int_0^x \frac{z}{8}e^{-\frac{z}{2}}e^{-\frac{x-z}{2}}\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^x \frac{z}{8}e^{-x/2}\,\mathrm{d}z = \frac{x^2}{8\cdot 2}\,e^{-x/2};$$

y en general, si $\chi_{2n}^2 = \frac{x^{n-1}}{2^n(n-1)!}e^{-x/2}$,

$$\chi_{2n}^2(x) = \int_0^x \chi_2^2(x-z)\chi_{2n-2}^2(z)\mathrm{d}z = \int_0^x \frac{z^{n-2}}{2^n(n-2)!}e^{-x/2}\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{x^{n-1}}{2^n(n-1)!}\,e^{-x/2},$$

o lo que es lo mismo,

$$\chi_n^2(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\,e^{-x/2}, \qquad n \text{ par}.$$

c) Para n impar comenzaremos calculando χ_3^2:

$$\chi_3^2(x) = \int_0^x \chi_2^2(x-z)\chi_1^2(z)\mathrm{d}z = \int_0^x \tfrac{1}{2}e^{-\frac{x-z}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\,e^{-\frac{z}{2}}\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{2\pi z}}\,e^{-x/2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x}\,e^{-x/2}.$$

Sucesivas intergraciones de $\sqrt{z}$, junto con el factor ½ procedente de χ^2_2, darán lugar a la constante

$$\frac{1}{2^n\sqrt{2}}\,\frac{2\cdot 2\cdots\ 2}{\sqrt{\pi}\,1\cdot 3\cdots(2n-1)} = \frac{1}{2^{n+\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)!}.$$

Por lo tanto

$$\chi^2_{2n+1}(x) = \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}}\left(n-\frac{1}{2}\right)!}\,e^{-x/2},$$

o lo que es lo mismo

$$\chi^2_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\,e^{-x/2}, \qquad n \text{ impar}.$$

Esta espresión es la misma que la de n par. □

5

1. Estimación con función asimétrica

Este ejercico es continuación de 3.2. Suponemos los mismos tres valores observados que entonces: 0,15, 0,25 y 0,5. Empezaremos estudiando el caso en el que la función de densidad de las observaciones se desplaza con el valor real. Los resultados de aquel ejercicio que son necesarios para este son los siguientes:

$$g(\mathfrak{l}) \propto \mathfrak{l}(\mathfrak{l}^2 - 3\mathfrak{l} + 2)(4\mathfrak{l}^2 - 5{,}6\mathfrak{l} + 1{,}95)(4\mathfrak{l}^2 - 6\mathfrak{l} - 1{,}75)(4\mathfrak{l}^2 - 5{,}2\mathfrak{l} - 2{,}31),$$

y la constante de proporcionalidad que falta es 1,052.

a) Obtener gráficamente intervalos de confianza de longitud mínima (aunque no se sepa su probabilidad).
b) Obtener con las herramientas de que se disponga el intervalo de longitud mínima para $p = 95\,\%$.
c) Obtener gráficamente la estimación de máxima probabilidad.
d) Obtener la estimación centrada y compararla con las dos anteriores.

Pasemos ahora al caso en el que la función $f_\mathfrak{l}(\ell)$ se escala con el valor real. Hay considerados a su vez dos subcasos: $h(\mathfrak{l}) \propto 1$ y $h(\mathfrak{l}) \propto 1/\mathfrak{l}$. Las funciones g son respectivamente

$$g(\mathfrak{l}) \propto \frac{(4{,}8\mathfrak{l}^2 - 0{,}027)(8\mathfrak{l}^2 - 0{,}125)(16\mathfrak{l}^2 - 1)}{\mathfrak{l}^{12}}, \tag{5.1.1}$$

$$\text{y } g(\mathfrak{l}) \propto \frac{(4{,}8\mathfrak{l}^2 - 0{,}027)(8\mathfrak{l}^2 - 0{,}125)(16\mathfrak{l}^2 - 1)}{\mathfrak{l}^{15}}. \tag{5.1.2}$$

Las constantes de proporcionalidad son $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ y $1{,}27 \cdot 10^{-6}$.

e) Describir cómo se obtendrían gráficamente intervalos de confianza de longitud mínima.
f) Modificar las funciones g de manera que los intervalos de confianza se obtengan por intersección de rectas horizontales, y obtener algunos de ellos.

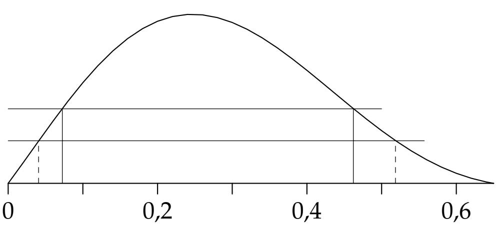
g) Calcular la estimación centrada en ambos casos.

h) ¿Porqué si $h \propto 1$ los intervalos de confianza así como la estimación centrada resultan ser tan elevados?

† *i*) ¿Cómo obtendríamos la estimación de máxima probabilidad?

j) Si $f_\mathrm{l}(\ell)$ se desplaza con el valor real, demostrar que la media aritmética $\overline{\ell}$ menos 0,03 es un estimador centrado en sentido directo, mientras que si $f_\mathrm{l}(\ell)$ se escala entonces la estimación centrada directa es $\ell/1{,}06$.

a) Los intervalos de longitud mínima vienen dados por cortes de la gráfica de g con rectas horizontales. A continuación se muestran dos:



El enunciado dice que la función de densidad de los valores observados se desplaza con el valor real. Se trata entonces de una variable sin un cero absoluto (al menos en la zona que se estudia) y cuyos valores ajustados se darán centrados en el intervalo. Obsérvese en la gráfica que cuanta mayor probabilidad queramos para el intervalo mayor es el valor ajustado que se dará.

b) El intervalo mínimo del 95 % tiene por extremos dos valores x e y que cumplen:

$$\int_x^y g(\mathrm{l})\mathrm{dl} = \mathrm{G}(y) - \mathrm{G}(x) = 0{,}95$$

$$g(x) = g(y)$$

Ambas ecuaciones son polinomios. Si se dispone de una herramienta que permita resolver de manera aproximada un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtienen inmediatamente los valores x e y. Si sólo tenemos la posibilidad de resolver una ecuación, podemos asignar en la primera un valor a x y resolver y; sustituimos en la de abajo y observamos hacia dónde hay que desplazar el intervalo; en base a ello asignamos un nuevo valor a x, repetimos el proceso y así hasta que alcancemos la precisión deseada. De esta manera es como se obtuvo la siguiente solución aproximada, exacta en todos los decimales que se muestran:

$$x = 0{,}0406, \quad y = 0{,}5198.$$

Por lo tanto daríamos el resultado de la siguiente forma:

$$l = 0{,}28 \pm 0{,}24, \quad p = 95\,\%$$

□

Este apartado pone de manifiesto un problema muy habitual en la estimación: la teoría es sencilla y se puede plantear sin mucha dificultad qué es lo que se de debe de hacer, pero se trata de un problema inverso, que requiere la resolución de sistemas de ecuaciones complicados. En este caso sólo existe una variable y tres medidas, pero en problemas más amplios no es raro que incluso una solución numérica aproximada sea difícil de obtener.

c) En la gráfica vemos que la solución de máxima probabilidad es $l = 0{,}248$.

d) La estimación centrada es el valor de

$$\int_0^{0{,}65} x g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}277.$$

e) Para una variable de tipo escala los intervalos de confianza de longitud mínima son aquellos cuyos extremos x_1 y x_2 cumplen $x_1 g(x_1) = x_2 g(x_2)$ (cf. [p. 43]). Esto lo podemos escribir como $g(x_1) = k/x_1$ y $g(x_2) = k/x_2$, para cualquier constante k. Esto significa que los extremos de los intervalos son las intersecciones de la función g con curvas k/x.

f) Las curvas cuya intersección con la gráfica de la función g marcan los extremos de los intervalos mínimos son k/x, de modo que si multiplicamos todo por x las curvas pasan a ser k (horizontales) y $g(x)$ pasa a $xg(x)$. Así pues, los intervalos de longitud mínima vienen dados por la intersección de la función $\dot{g} = xg$ con rectas horizontales. En la página siguiente se muestran algunos.

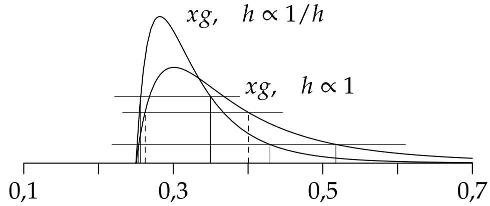


Fig. 5.1.1: Intervalos mínimos para una variable de tipo escala

g) La estimación centrada es como siempre $\int_{0,25}^{1} xg(x)\,\mathrm{d}x$. Se obtienen los siguientes valores:

$$\mathfrak{l} = 0{,}368, \quad h \propto 1, \qquad\qquad \mathfrak{l} = 0{,}321, \quad h \propto 1/h$$

h) Para una variable de tipo escala no saber nada significa $h \propto 1/\mathfrak{l}$. Por ello, si tomamos $h \propto 1$ estamos aumentanto enormemente la probabilidad de existencia de valores mayores. No saber nada supone, por ejemplo, que la probablidad contenida por h en $[1, 2]$ ha de ser la misma que en $[1000, 2000]$, mientras que con $h \propto 1$ la probabilidad entre 1 y 2 es la misma que en el pequeño intervalo $[1000, 1001]$, y la total en $[1000, 2000]$ es mil veces mayor que en $[1, 2]$. Por ello, al considerar más verosímiles valores mayores que menores, se obtiene en la estimación intervalos centrados en valores elevados, e igual ocurre con la estimación centrada.

† ***i)*** Que un punto x tenga mayor densidad de probabilidad que otro y significa que, para Δ suficientemente pequeño, $\mathrm{P}(z \in \mathrm{I}_{x,\Delta}) > \mathrm{P}\big(z \in \mathrm{I}_{y,\Delta}\big)$. Ahora bien, la longitud Δ de un intervalo debemos medirla con la métrica relativa a una variable de tipo escala; es decir, para un intervalo $[a, b]$ no será $b - a$ sino b/a. Por ello el punto de máxima probabilidad no es el que cumple que $g(x)$ es máx., sino el que cumple que $xg(x)$ es máximo. Por lo tanto la estimación de máxima probabilidad es el máximo de $\dot{g}$.

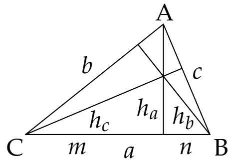
† En la función g, los puntos con mayor probabilidad según la métrica de un factor de escala son los que están más altos en relación a las curvas k/x, que son las que representan una densidad de probabilidad constante (por ello son las que dan los intervalos mínimos), y el punto de máxima probabilidad es aquél en el que la gráfica de g es tangente iferiormente a una de esas curvas.

j) La función $f_{0,5}$, que es la que tomamos como referencia, tiene por esperanza (media) $\mathrm{E}[\ell] = 0{,}53$. Si la distribución se desplaza con $\mathfrak{l}$, para cualquier $\mathfrak{l}$ se cumple $\mathrm{E}[\ell] - \mathfrak{l} = 0{,}03$, y el estimador $\overline{\ell} - 0{,}03$ tiene por esperanza $\mathrm{E}[\overline{\ell}] - 0{,}03 = \mathrm{E}[\ell] - 0{,}03 = \mathfrak{l}$ y es centrado.

Si por el contrario la función $f_{\mathfrak{l}}$ se escala, la relación que satisfacen todas las funciones es $\mathrm{E}[\ell]/\mathfrak{l} = 0{,}53/0{,}5 = 1{,}06$, y el estimador $\overline{\ell}/1{,}06$ es centrado. $\square$

7

1. Triángulo, I



En un triángulo se miden los tres lados y las tres alturas, obteniendo los siguientes valores:

$$a = 6{,}93, \qquad b = 6{,}61, \qquad c = 4{,}57,$$
$$h_a = 4{,}15, \qquad h_b = 4{,}25, \qquad h_c = 6{,}40.$$

Hallar la solución mínimo cuadrática.

➡ Por tratarse de un triángulo el problema queda determinado con tres longitudes. Si tomamos como parámetros los tres lados la expresión de las alturas será un tanto complicada. Es más sencillo tomar una altura h_a y los segmentos en que esta altura divide a la base opuesta a: m y n.

Una vez escogidos los parámetros tenemos que expresar las magnitudes observadas en función de ellos. Lo escribimos en términos de los valores ajustados:

$$h_a = h_a, \qquad a = m + n, \qquad b = \sqrt{h_a^2 + m^2}, \qquad c = \sqrt{h_a^2 + n^2}.$$

Las expresiones para h_b y h_c las obtenemos a partir de las relaciones $ah_a = bh_b = ch_c$:

$$h_b = \frac{(m+n)h_a}{\sqrt{h_a^2 + m^2}}, \qquad h_c = \frac{(m+n)h_a}{\sqrt{h_a^2 + n^2}}.$$

Las primeras relaciones linealizadas son las siguientes:

$$h_a = h_{a0} + \Delta h_a, \qquad a = (m+n)_0 + \Delta m + \Delta n,$$

$$b \approx \left(\sqrt{h_a^2 + m^2}\right)_0 + \left(\frac{2h_a}{2\sqrt{h_a^2 + m^2}}\right)_0 \Delta h_a + \left(\frac{2m}{2\sqrt{h_a^2 + m^2}}\right)_0 \Delta m$$
$$\approx \left(\sqrt{h_a^2 + m^2}\right)_0 + \left(\frac{h_a}{b}\right)_0 \Delta h_a + \left(\frac{m}{a}\right)_0 \Delta m,$$

$$c \approx \left(\sqrt{h_a^2+n^2}\right)_0 + \left(\frac{h_a}{c}\right)_0 \Delta h_a + \left(\frac{n}{c}\right)_0 \Delta n.$$

La derivada de h_b respecto de cada uno de los parámetros de que depende es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_b}{\partial m} &= \frac{h_a}{\sqrt{h_a^2+m^2}} - \frac{(m+n)h_a m}{\left(\sqrt{h_a^2+m^2}\right)^3} = \frac{h_a}{b} - \frac{mh_b}{b^2},\\
\frac{\partial h_b}{\partial n} &= \frac{h_a}{\sqrt{h_a^2+m^2}} = \frac{h_a}{b},\\
\frac{\partial h_b}{\partial h_a} &= \frac{h_b}{h_a} - \frac{a h_a^2}{\left(\sqrt{h_a^2+m^2}\right)^3} = \frac{a}{b} - \frac{h_a h_b}{b^2}.
\end{aligned}$$

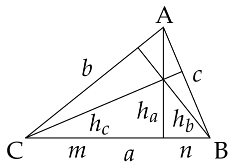
Entonces la ecuación linealizada de h_b es

$$\begin{aligned}
h_b \approx \left(\frac{(m+n)h_a}{\sqrt{h_a^2+m^2}}\right)_0 &+ \left(\frac{h_a}{b} - \frac{mh_b}{b^2}\right)_0 \Delta m\\
&+ \left(\frac{h_a}{b}\right)_0 \Delta n + \left(\frac{a}{b} - \frac{h_a h_b}{b^2}\right)_0 \Delta h_a,
\end{aligned}$$

y análogamente para h_c.

Las ecuaciones de residuo quedan planteadas como sigue:

$$\begin{aligned}
v_{h_a} &= h_a - h_{a0} - \Delta h_a,\\
v_a &= a - a_0 - (\Delta m + \Delta n),\\
v_b &\approx b - b_0 - \left\{\left(\frac{h_a}{b}\right)_0 \Delta h_a + \left(\frac{m}{a}\right)_0 \Delta m\right\},\\
v_c &\approx c - c_0 - \left\{\left(\frac{h_a}{c}\right)_0 \Delta h_a + \left(\frac{n}{a}\right)_0 \Delta n\right\},\\
v_{h_b} &\approx h_b - h_{b0} - \left\{\left(\frac{a}{b} - \frac{h_a h_b}{b^2}\right)_0 \Delta h_a + \left(\frac{h_a}{b} - \frac{mh_b}{b^2}\right)_0 \Delta m + \left(\frac{h_a}{b}\right)_0 \Delta n\right\},\\
v_{h_c} &\approx h_c - h_{c0} - \left\{\left(\frac{a}{c} - \frac{h_a h_c}{c^2}\right)_0 \Delta h_a + \left(\frac{h_a}{c}\right)_0 \Delta m + \left(\frac{h_a}{c} - \frac{nh_c}{c^2}\right)_0 \Delta n\right\}.
\end{aligned}$$



Podemos tomar $h_{a0} = 4{,}15$ obtener gráficamente $m_0 = 5{,}18$ y $n_0 = 1{,}75$. A partir de estos valores se obtienen los derivados: $a_0 = 6{,}93$, $b_0 = 6{,}64$, $c_0 = 4{,}50$, $h_b = 4{,}33$ y $h_c = 6{,}39$. Una vez sustituídos en las ecuaciones queda:

$$\begin{aligned}
v_{h_a} &= 0 - \Delta h_a\,,\\
v_a &= 0 - (\Delta m + \Delta n)\,,\\
v_b &\approx -0{,}03 - (0{,}63\,\Delta h_a + 0{,}75\,\Delta m)\,,\\
v_c &\approx -0{,}07 - (0{,}92\,\Delta h_a + 0{,}25\,\Delta n)\,,\\
v_{h_b} &\approx -0{,}08 - (0{,}64\,\Delta h_a + 0{,}12\,\Delta m + 0{,}63\,\Delta n)\,,\\
v_{h_c} &\approx 0{,}01 - (0{,}23\,\Delta h_a + 0{,}92\,\Delta m + 0{,}37\Delta n)\,.
\end{aligned}$$

En forma matricial,

$$\begin{pmatrix} v_{h_a}\\ v_a\\ v_b\\ v_c\\ v_{h_b}\\ v_{h_c}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -0{,}03\\ 0{,}07\\ -0{,}08\\ 0{,}01\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0{,}63 & 0{,}75 & 0\\ 0{,}92 & 0 & 0{,}25\\ 0{,}64 & 0{,}12 & 0{,}63\\ 0{,}23 & 0{,}92 & 0{,}37\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\Delta h_a\\ \Delta m\\ \Delta n\end{pmatrix}.$$

Tras operar se obtienen las siguientes matrices:

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 2{,}698 & 0{,}755 & 0{,}716\\ 0{,}755 & 2{,}421 & 1{,}414\\ 0{,}716 & 1{,}414 & 1{,}592\end{pmatrix},\quad \mathrm{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}423 & -0{,}043 & -0{,}152\\ -0{,}043 & 0{,}862 & -0{,}746\\ -0{,}152 & -0{,}746 & 1{,}359\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} = \begin{pmatrix} -0{,}0056\\ -0{,}0167\\ -0{,}0298\end{pmatrix},\qquad \mathrm{X}_\Delta \approx \begin{pmatrix} 0{,}003\\ 0{,}008\\ -0{,}027\end{pmatrix}.$$

Con ello los valores ajustados de todas las magnitudes que intervienen son:

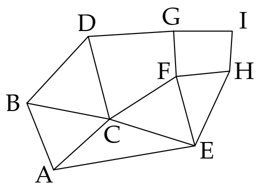
$$\begin{aligned}
h_a &= 4{,}15, & m &= 5{,}19, & n &= 1{,}72, & a &= 6{,}91,\\
b &= 6{,}65, & c &= 4{,}50, & h_b &= 4{,}32, & h_c &= 6{,}38;
\end{aligned}$$

y los residuos:

$$v_{h_a} = 0{,}00, \qquad v_a = -0{,}02, \qquad v_b = 0{,}04,$$
$$v_c = -0{,}07, \qquad v_{h_b} = 0{,}07, \qquad v_{h_c} = -0{,}02.$$

□

2. Nivelación geométrica, I



La figura muestra una red de nivelación geométrica. Los desniveles medidos son los siguientes, en metros:

$$Z_A^B = 9{,}763,\ Z_A^C = 13{,}016,\ Z_A^E = 11{,}064,$$
$$Z_B^C = 3{,}250,\ Z_B^D = 3{,}180,\ Z_D^C = 0{,}072,$$

$$Z_D^G = 2{,}360, \quad Z_C^E = -1{,}948, \quad Z_C^F = 1{,}399, \quad Z_E^F = 3{,}347,$$
$$Z_E^H = 3{,}371, \quad Z_F^H = 0{,}021, \quad Z_F^G = 0{,}891, \quad Z_G^I = -0{,}120,$$
$$Z_H^I = 0{,}751.$$

Obtener la solución mínimo cuadrática.

➡ Se puede plantear el problema tomando desniveles como parámetros o bien tomando las alturas de los puntos. Es más sencillo esto último. Es necesario fijar arbitrariamente la cota de algún punto. Un análisis somero de los datos basta para reconocer que el punto A es el más bajo. Le daremos cota 100.

El probema ya es lineal, por lo que no es necesario tomar valores aproximados. El hacerlo tiene la ventaja de que son suficentes pocos decimales en la matriz A. Si no tomamos valores aproximados los coeficientes de la matriz A multiplicarán a cantidades Z absolutas. Para mantener tres decimales en la precisión del resultado es necesario tomar en la matriz A más de 5 cifras decimales, es decir, 6, y serían 7 si las cotas sobrepasasen los mil metros. Con valores aproximados son suficientes dos cifras significativas, como es habitual. Pero en este problema los coeficientes de la matriz A distrintos de 0 son exclusivamente 1 y -1, por lo que la discusión acerca del número de cifras decimales es ociosa. Ahora bien, no lo será en cuanto apliquemos pesos, que será normalmente como se obtenga la solución mínimo cuadrática correcta. Así pues, tomaremos valores aproximados.

A partir de A y tomando algunos de los desniveles observados obtenemos los siguientes valores aproximados:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Z}_{\mathrm{B}0} = 109{,}763, \quad \mathrm{Z}_{\mathrm{C}0} = 113{,}016, \quad \mathrm{Z}_{\mathrm{D}0} = 112{,}943, \quad \mathrm{Z}_{\mathrm{E}0} = 111{,}064,\\
&\mathrm{Z}_{\mathrm{F}0} = 114{,}415, \quad \mathrm{Z}_{\mathrm{G}0} = 115{,}303, \quad \mathrm{Z}_{\mathrm{H}0} = 114{,}435, \quad \mathrm{Z}_{\mathrm{I}0} = 115{,}186.
\end{aligned}$$

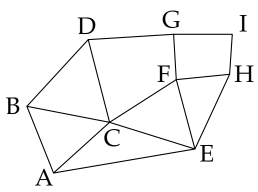
La ecuación de residuo de un desnivel, por ejemplo de E a F, se obtiene como sigue:

$$v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{F}}} = \mathrm{Z}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{F}} - \mathrm{Z}_{\mathrm{E}0}^{\mathrm{F}} - (-\Delta Z_{\mathrm{E}} + \Delta Z_{\mathrm{F}}) = -0{,}004 - (-\Delta Z_{\mathrm{E}} + \Delta Z_{\mathrm{F}}).$$

Las demás ecuaciones son análogas a esta, salvo aquellas en las que interviene Z_{A}, en las que el término $-\Delta Z_{\mathrm{A}}$ se omite porque Z_{A} no es un parámetro sino el valor fijo 100.

El sistema de ecuaciones escrito en forma matricial es el que se muestra a continuación. Para que se vean mejor los elementos distintos de cero en la matriz A, se han sustituído los 0 por $\cdot$.

$$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{E}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{D}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{G}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{E}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{F}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{F}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{H}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{H}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{G}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{I}}}\\ v_{\mathrm{Z}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{I}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ -0{,}003\\ 0\\ -0{,}001\\ 0\\ 0{,}004\\ 0\\ -0{,}004\\ 0\\ 0{,}001\\ 0{,}003\\ -0{,}003\\ 0 \end{pmatrix} - \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \mathrm{Z}_{\mathrm{B}} & \mathrm{Z}_{\mathrm{C}} & \mathrm{Z}_{\mathrm{D}} & \mathrm{Z}_{\mathrm{E}} & \mathrm{Z}_{\mathrm{F}} & \mathrm{Z}_{\mathrm{G}} & \mathrm{Z}_{\mathrm{H}} & \mathrm{Z}_{\mathrm{I}}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \Delta Z_{\mathrm{B}}\\ \Delta Z_{\mathrm{C}}\\ \Delta Z_{\mathrm{D}}\\ \Delta Z_{\mathrm{E}}\\ \Delta Z_{\mathrm{F}}\\ \Delta Z_{\mathrm{G}}\\ \Delta Z_{\mathrm{H}}\\ \Delta Z_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}$$



La matriz N es

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & 5 & -1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & -1 & 3 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & -1 & \cdot & 4 & -1 & \cdot & -1 & \cdot \\
\cdot & -1 & \cdot & -1 & 4 & -1 & -1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & -1 & \cdot & -1 & 3 & \cdot & -1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 & \cdot & 3 & -1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 & 2
\end{pmatrix}$$

El resultado para los incrementos es

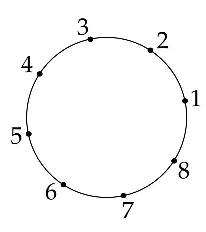
$$\begin{array}{llll}
\Delta Z_{\mathrm{B}} = 0{,}001, & \Delta Z_{\mathrm{C}} = -0{,}002, & \Delta Z_{\mathrm{D}} = 0, & \Delta Z_{\mathrm{E}} = 0{,}001, \\
\Delta Z_{\mathrm{F}} = -0{,}002, & \Delta Z_{\mathrm{G}} = 0{,}001, & \Delta Z_{\mathrm{H}} = 0, & \Delta Z_{\mathrm{I}} = -0{,}001,
\end{array}$$

con lo que los valores ajustados son

$$\begin{array}{lll}
Z_{\mathrm{A}} = 100, & Z_{\mathrm{B}} = 109{,}764, & Z_{\mathrm{C}} = 113{,}014, \\
Z_{\mathrm{D}} = 112{,}943, & Z_{\mathrm{E}} = 111{,}065, & \\
Z_{\mathrm{F}} = 114{,}413, & Z_{\mathrm{G}} = 115{,}304, & \\
Z_{\mathrm{H}} = 114{,}435, & Z_{\mathrm{I}} = 115{,}185. &
\end{array}$$

□

3. Circunferencia

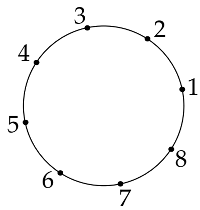


Se midieron las coordenadas de un conjunto de puntos sobre una circunferencia que podemos considerar perfecta. Suponemos que la medida de cada coordenada sigue una distribución normal y es independiente de la otra cordenada y de las medidas de los otros puntos. Los valores medidos son los siguientes:

	1	2	3	4	5	6	7	8
x	4,4572	3,5888	2,0848	0,8227	0,5434	1,4105	2,9151	4,1782
y	2,5157	3,7771	4,0568	3,1872	1,6839	0,4244	0,1423	1,0115

a) ¿Qué significa que podemos considerar la circunferencia como perfecta?

b) Determinar una circunferencia ajustada.



a) Que podamos considerar la circunferencia como perfecta significa que su definición es mejor que la precisión de las medidas, y suficientemente mejor como para que su imperfección pueda ignorarse.

b) La circunferencia queda definida por las coordenadas de su centro, x_c e y_c, y su radio, r. Pero estos parámetros no alcanzan a expresar el conjunto de magnitudes observadas. Para poder definir las coordenadas de un punto observado es necesario añadir un parámetro que defina su posición sobre la circunferencia: un ángulo θ a partir de una dirección fija, que tomaremos como el sentido positivo del eje x. Así,

$$x_i = x_c + r\cos\theta_i, \qquad y_i = y_c + r\sin\theta_i.$$

Los valores aproximados se pueden obtener como siempre a partir de un croquis. De manera analítica se pueden obtener hallando la circunferencia que pasa por tres de los puntos medidos, teniendo cuidado de no tomar dos puntos muy juntos, situación que en este problema no se da. A continuación se muestran unos valores.

$$x_{c0} = 12{,}5, \quad y_{c0} = 2{,}1, \qquad r_0 = 2{,}0.$$

$$\begin{array}{llll} \theta_1 = 12°, & \theta_2 = 57°, & \theta_3 = 102°, & \theta_4 = 147°, \\ \theta_5 = 192°, & \theta_6 = 237°, & \theta_7 = 282°, & \theta_8 = 327°. \end{array}$$

Para estos números, los valores aproximados de las coordenadas de los puntos y los términos L son los siguentes:

Punto	x	x_0	L_x	y	y_0	L_y
1	14,4572	14,4563	0,0009	2,5157	2,5158	−0,0002
2	13,5888	13,5893	−0,0005	3,7771	3,7773	−0,0002
3	12,0848	12,0842	0,0006	4,0568	4,0563	0,0005
4	10,8227	10,8227	0,0001	3,1872	3,1893	−0,0020
5	10,5434	10,5437	−0,0003	1,6839	1,6842	−0,0003
6	11,4105	11,4107	−0,0002	0,4244	0,4227	0,0018
7	12,9151	12,9158	−0,0007	0,1423	0,1437	−0,0014
8	14,1782	14,1773	0,0009	1,0115	1,0107	0,0008

Las derivadas de x_i e y_i respecto de los parámetros son:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial x_c} &= \frac{\partial y_i}{\partial y_c} = 1, & \frac{\partial x_i}{\partial y_c} &= \frac{\partial y_i}{\partial x_c} = 0,\\
\frac{\partial x_i}{\partial r} &= \frac{x_i - x_c}{r}, & \frac{\partial x_i}{\partial \theta_i} &= -\frac{y_i - y_c}{r},\\
\frac{\partial y_i}{\partial r} &= \frac{y_i - x_c}{r}, & \frac{\partial y_i}{\partial \theta_i} &= \frac{x_i - x_c}{r}.
\end{aligned}
$$

Se obtiene la siguiente matriz A:

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} x_c & y_c & r & \multicolumn{8}{c}{\theta_1\text{–}\theta_8} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \multicolumn{8}{c}{\downarrow} \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \to \\ y_1 \to \\ x_2 \to \\ y_2 \to \\ x_3 \to \\ y_3 \to \\ x_4 \to \\ y_4 \to \\ x_5 \to \\ y_5 \to \\ x_6 \to \\ y_6 \to \\ x_7 \to \\ y_7 \to \\ x_8 \to \\ y_8 \to \end{array}
&
\begin{pmatrix}
1 & \cdot & 0{,}98 & -0{,}21 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & 0{,}21 & 0{,}98 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & 0{,}54 & \cdot & -0{,}84 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & 0{,}84 & \cdot & 0{,}54 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & -0{,}21 & \cdot & \cdot & -0{,}98 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & 0{,}98 & \cdot & \cdot & -0{,}21 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & -0{,}84 & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}54 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & 0{,}54 & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}84 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & -0{,}98 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}21 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & -0{,}21 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}98 & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & -0{,}54 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}84 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & -0{,}84 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}54 & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & 0{,}21 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}98 & \cdot \\
\cdot & 1 & -0{,}98 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}21 & \cdot \\
1 & \cdot & 0{,}84 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}54 \\
\cdot & 1 & -0{,}54 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}84
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Los incrementos son

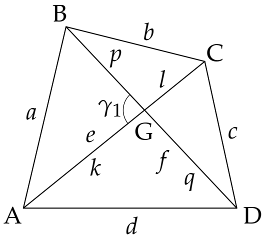
$$
\begin{array}{llll}
\Delta x_c = 0{,}0006, & \Delta y_c = -0{,}0002, & \Delta r = 0{,}00002; & \\
\Delta\theta_1 = -0{,}0001, & \Delta\theta_2 = 0{,}0008, & \Delta\theta_3 = -0{,}0002, & \Delta\theta_4 = 0{,}0019,\\
\Delta\theta_5 = -0{,}0001, & \Delta\theta_6 = -0{,}0017, & \Delta\theta_7 = -0{,}0015, & \Delta\theta_8 = 0{,}0009.
\end{array}
$$

Los incrementos a los ángulos están en radianes. La circunferencia ajustada es entonces:

$$x_c = 12{,}5006, \qquad y_c = 2{,}0998, \qquad r = 2{,}00002. \qquad \square$$

8

1. Cuadrilátero, distancias



En el cuadrilátero de la figura se midieron los cuatro lados y las diagonales, obteniendo los siguientes valores, en metros:

$$a = 15{,}627, \quad b = 19{,}072, \quad c = 8{,}584,$$
$$d = 17{,}737, \quad e = 19{,}460, \quad f = 20{,}951.$$

a) Resolver la figura empleando los parámetros $k = \mathrm{AG}$, $l = \mathrm{GC}$, $p = \mathrm{BG}$, $q = \mathrm{GD}$ y γ_1.

b) Plantear la resolución si en el conjunto anterior de parámetros substituimos γ_1 por $u = \cos\gamma_1$.

c) Resolver la figura empleando como parámetros coordenadas.

***a*)** En primer lugar, unos valores aproximados:

$$k_0 = 13{,}05, \quad l_0 = 6{,}4, \quad p_0 = 9{,}7, \quad q_0 = 11{,}25, \quad \gamma_{10} = 95{,}6.$$

Las expresiones de las magnitudes observadas en función de los parámetros son las siguientes:

$$\begin{aligned}
a &= \left(k^2 + p^2 - 2kp\cos\gamma_1\right)^{1/2}, & e &= k + l,\\
b &= \left(p^2 + l^2 + 2pl\cos\gamma_1\right)^{1/2}, & f &= p + q.\\
c &= \left(l^2 + q^2 - 2lq\cos\gamma_1\right)^{1/2}, & &\\
d &= \left(q^2 + k^2 + 2qk\cos\gamma_1\right)^{1/2}, & &
\end{aligned}$$

Las derivadas son

$$\frac{\partial a}{\partial k} = \frac{k - p\cos\gamma_1}{a}, \qquad \frac{\partial a}{\partial p} = \frac{p - k\cos\gamma_1}{a}, \qquad \frac{\partial a}{\partial \gamma_1} = \frac{kp\sin\gamma_1}{a};$$
$$\frac{\partial b}{\partial p} = \frac{p + l\cos\gamma_1}{b}, \qquad \frac{\partial b}{\partial l} = \frac{l + p\cos\gamma_1}{b}, \qquad \frac{\partial b}{\partial \gamma_1} = -\frac{pl\sin\gamma_1}{b}.$$

Las derivadas de c y d son las mismas cambiando k, p y l por l, q y k respectivamente.

Los valores aproximados y los términos L son

	Obs.	Apr.	L
a	15,627	15,713	−0,086
b	12,072	11,984	0,088
c	12,584	12,553	0,031
d	17,737	17,809	−0,072
e	19,460	19,450	0,010
f	20,951	20,950	0,001

y el sistema de ecuaciones de residuo linealizado,

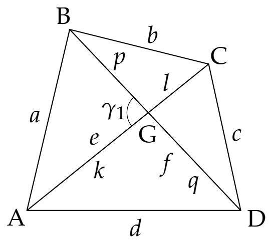
$$\begin{aligned}
v_a &\approx -0{,}086 - (0{,}79\,\Delta k + 0{,}56\,\Delta p + 8{,}0\,\Delta\gamma_1)\\
v_b &\approx -0{,}088 - (0{,}85\,\Delta p + 0{,}59\,\Delta l - 5{,}2\,\Delta\gamma_1)\\
v_c &\approx -0{,}031 - (0{,}45\,\Delta l + 0{,}86\,\Delta q + 5{,}7\Delta\gamma_1)\\
v_d &\approx -0{,}072 - (0{,}68\,\Delta q + 0{,}78\,\Delta k - 8{,}2\,\Delta\gamma_1)\\
v_e &= 0{,}010 - (\Delta k + \Delta l)\\
v_f &= 0{,}001 - (\Delta p + \Delta q)
\end{aligned}$$

La matriz A es

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} k & p & l & q & \gamma_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} a \rightarrow \\ b \rightarrow \\ c \rightarrow \\ d \rightarrow \\ e \rightarrow \\ f \rightarrow \end{array} &
\begin{pmatrix}
0{,}79 & 0{,}56 & \cdot & \cdot & 8{,}0\\
\cdot & 0{,}85 & 0{,}59 & \cdot & -5{,}2\\
\cdot & \cdot & 0{,}45 & 0{,}86 & 5{,}7\\
0{,}78 & \cdot & \cdot & 0{,}68 & -8{,}2\\
1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot\\
\cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot
\end{pmatrix}
\end{array}$$

y la matriz N^{-1},

$$\begin{pmatrix}
0{,}649 & -0{,}001 & -0{,}398 & -0{,}086 & -1{,}13\cdot10^{-3}\\
-0{,}001 & 0{,}665 & -0{,}146 & -0{,}276 & -1{,}80\cdot10^{-3}\\
-0{,}398 & -0{,}146 & 0{,}951 & -0{,}004 & 2{,}38\cdot10^{-3}\\
-0{,}086 & -0{,}276 & -0{,}004 & 0{,}600 & 2{,}29\cdot10^{-3}\\
-1{,}13\cdot10^{-3} & -1{,}80\cdot10^{-3} & 2{,}38\cdot10^{-3} & 2{,}29\cdot10^{-3} & 5{,}23\cdot10^{-3}
\end{pmatrix}.$$



Finalmente el vector de incrementos y los valores ajustados son

	Δx	x	(m, rad)
k	$-0{,}102$	$12{,}948$	
p	$0{,}013$	$9{,}713$	
l	$0{,}112$	$6{,}512$	
q	$-0{,}011$	$11{,}239$	
γ_1	$-0{,}0018$	$1{,}4999$ $(= 95^{g}49)$	

y los residuos resultantes,

$$v_a = 0{,}000, \qquad v_b = 0{,}000, \qquad v_c = 0{,}000,$$
$$v_d = 0{,}000, \qquad v_e = 0{,}001, \qquad v_f = 0{,}001.$$

□

A la vista de los residuos parece que la precisión es mayor que un milímetro y que habría que dar los valores con más decimales. Sin embargo lo bajo de los residuos se debe a que sólo hay una redundancia. De hecho, en este ejercicio la precisión de las medidas no es mejor de 0,05 m.

Si fuesen necesarias más iteraciones podríamos seguir empleando la misma matriz N^{-1}. Entonces solamente hay que volver a calcular los valores ajustados, el vector L y el vector $\mathrm{A}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}$.

b) Si en lugar de γ_1 empleamos $u = \cos\gamma_1$ las ecuaciones de las magnitudes observadas en función de los parámetros son

$$a = \left(k^2 + p^2 - 2kp\,u\right)^{1/2}, \text{ etc.},$$

y las derivadas de los valores ajustados en función de u,

$$\frac{\partial a}{\partial u} = -\frac{kp}{a}, \text{ etc.}$$

En las demás derivadas simplemente substituímos $\cos\gamma$ por u.

c) Para emplear coordenadas como parámetros podemos hacer $(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}) = (0, 0)$ e $y_{\mathrm{D}} = 0$. Los parámetros son x_{D}, x_{B}, y_{B}, x_{C} e y_{C}. Los siguientes son unos valores aproximados:

$$x_{\mathrm{D}0} = 17{,}75, \quad x_{\mathrm{B}0} = 3{,}6, \quad y_{\mathrm{B}0} = 35{,}3, \quad x_{\mathrm{C}0} = 15, 0, \quad y_{\mathrm{C}0} = 12{,}3.$$

Las magnitudes observadas en función de los parámetros son:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{x_B^2 + y_B^2},\\
b &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2},\\
c &= \sqrt{(x_D - x_C)^2 + y_C^2},\\
d &= x_D,\\
e &= \sqrt{x_C^2 + y_C^2},\\
f &= \sqrt{(x_D - x_B)^2 + x_B^2}.
\end{aligned}$$

Las derivadas son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x_B} &= \frac{x_B}{a}, & \frac{\partial a}{\partial y_B} &= \frac{y_B}{b},\\
\frac{\partial b}{\partial x_C} &= \frac{x_C - x_B}{b}, & \frac{\partial b}{\partial x_B} &= -\frac{\partial b}{\partial x_C},\\
\frac{\partial b}{\partial y_C} &= \frac{y_C - y_B}{b}, & \frac{\partial b}{\partial y_B} &= -\frac{\partial b}{\partial y_C},
\end{aligned}$$

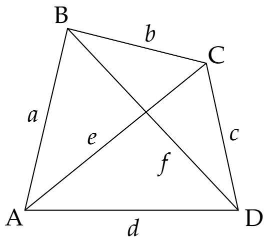
etc.

La matriz A es

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_B & y_B & x_C & y_C & x_D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} a \rightarrow \\ b \rightarrow \\ c \rightarrow \\ d \rightarrow \\ e \rightarrow \\ f \rightarrow \end{array} &
\begin{pmatrix}
0{,}23 & 0{,}97 & \cdot & \cdot & \cdot \\
-0{,}97 & 0{,}25 & 0{,}97 & -0{,}25 & \cdot \\
\cdot & \cdot & -0{,}22 & 0{,}98 & 0{,}22 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1{,}00 \\
\cdot & \cdot & 0{,}77 & 0{,}63 & \cdot \\
-0{,}68 & 0{,}73 & \cdot & \cdot & 0{,}68
\end{pmatrix};
\end{array}$$

y la matriz N^{-1},

$$\begin{pmatrix}
1{,}58 & 0{,}21 & 0{,}92 & -0{,}36 & 0{,}49 \\
0{,}21 & 0{,}78 & 0{,}00 & 0{,}03 & -0{,}20 \\
0{,}92 & 0{,}00 & 1{,}20 & -0{,}24 & 0{,}36 \\
-0{,}36 & 0{,}03 & -0{,}24 & 0{,}81 & -0{,}24 \\
0{,}49 & -0{,}20 & 0{,}36 & -0{,}24 & 0{,}92
\end{pmatrix}.$$



El vector de incrementos y los valores ajustados son

	Δx	x (m)
x_B	$-0{,}223$	3,377
y_B	$-0{,}041$	15,259
x_C	0,081	15,081
y_C	0,000	12,300
x_D	$-0{,}013$	17,737

y los residuos resultantes,

$$v_a = 0{,}001, \qquad v_b = 0{,}000, \qquad v_c = 0{,}000,$$
$$v_d = 0{,}000, \qquad v_e = 0{,}001, \qquad v_f = 0{,}002.$$

□

2. Cuadrilátero, distancias ponderadas

Ajustar el cuadrilátero del ejercicio anterior suponiendo que la desviación típica de una distancia S es $\sigma_S = 0{,}002 + 0{,}0001\,S$.

➡ De acuerdo al enunciado las desviaciones típicas de cada una de las medidas son

$$\sigma_a = 0{,}0036, \qquad \sigma_b = 0{,}0032, \qquad \sigma_c = 0{,}0033,$$
$$\sigma_c = 0{,}0038, \qquad \sigma_e = 0{,}0039, \qquad \sigma_f = 0{,}0041.$$

Hay que dividir cada ecuación, es decir, cada fila de la matriz A y del vector L, por su correspondiente σ. Se obtienen así las matrices A′ y L′:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_B & y_B & x_C & y_C & x_D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} a \rightarrow \\ b \rightarrow \\ c \rightarrow \\ d \rightarrow \\ e \rightarrow \\ f \rightarrow \end{array} &
\begin{pmatrix}
64 & 273 & \cdot & \cdot & \cdot \\
-304 & 80 & 304 & -80 & \cdot \\
\cdot & \cdot & -67 & 299 & 67 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 265 \\
\cdot & \cdot & 197 & 161 & \cdot \\
-166 & 180 & \cdot & \cdot & 166
\end{pmatrix}
\end{array}, \qquad
\begin{pmatrix} -25{,}4 \\ 89{,}3 \\ -6{,}0 \\ -3{,}4 \\ 15{,}7 \\ 27{,}1 \end{pmatrix}.$$

La matriz N^{-1} es ahora

$$10^{-5}\begin{pmatrix} 2{,}12 & 0{,}20 & 1{,}40 & -0{,}37 & 0{,}65 \\ 0{,}20 & 1{,}03 & -0{,}06 & 0{,}05 & -0{,}26 \\ 1{,}40 & -0{,}06 & 1{,}70 & -0{,}19 & 0{,}51 \\ -0{,}37 & 0{,}05 & -0{,}19 & 0{,}93 & -0{,}31 \\ 0{,}65 & -0{,}26 & 0{,}51 & -0{,}31 & 1{,}31 \end{pmatrix}.$$

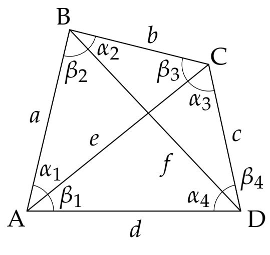
El vector de incrementos y los valores ajustados son

	Δx	x (m)
x_B	$-0{,}223$	3,377
y_B	$-0{,}041$	15,259
x_C	0,081	15,081
y_C	0,000	12,300
x_D	$-0{,}014$	17,736

y los residuos son iguales hasta tres decimales que sin aplicar pesos. □

La aplicación de pesos apenas se aprecia. La razón estriba en que los residuos son muy pequeños, debido a que solo hay una redundancia. Hay que recordar que el efecto de aplicar pesos es favorecer la disminución de unos residuos en favor de otros, y si todos son muy pequeños hay muy poco margen de variación. En ejercicios posteriores con más redundancias y con ello residuos mayores se apreciará mejor la influencia de los pesos.

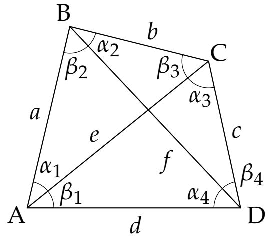
3. Cuadrilátero, ángulos



En el cuadrilátero de la figura se miden los ángulos representados obteniendo los siguientes valores:

$\beta_1 = 43^g573$, $\alpha_1 = 42^g569$, $\beta_2 = 61^g926$, $\alpha_2 = 36^g159$, $\beta_3 = 59^g317$, $\alpha_3 = 70^g003$, $\beta_4 = 34^g510$, $\alpha_4 = 51^g948$.

Ajustar la figura.



Antes de nada conviene observar que el enunciado ha cambiado el orden de los ángulos β respecto al libro de teoría. En las ecuaciones de residuo, y con ello en las matrices A, L y sus derivadas, resulta más cómodo disponer las observaciones de manera que aquéllas con origen en un mismo punto aparezcan contiguas. Siguiendo la nomenclatura del capítulo 8 del libro de teoría, esto daría lugar a un orden $\beta_4, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4$, un tanto extraño. Al asociar los ángulos cuyo vértice es común, resulta a su vez más claro nombrar los ángulos de cada vértice con un mismo subíndice, como se ha hecho en este ejercicio. La notación del libro de teoría es adecuada si conjuntamente se van a considerar los ángulos γ centrales, o si se va a plantear la ecuación de lado. No siendo esto así, lo más práctico es nombrar los ángulos como en este ejercicio.

➡ Empezamos como siempre escogiendo un conjunto de parámetros que definan el problema. Existiendo sólo medidas angulares debemos fijar la posición de dos puntos. Haremos $(x_A, y_A) = 0$ y fijaremos también el punto D. Lo más sencillo sería tomar $y_D = 0$ y $x_D = 1$, pero para poder aprovechar los cálculos de los ejercicios anteriores haremos en lugar de esto último $x_D = 17{,}75$. Los valores apoximados para los parámetros los tomamos iguales que en los ejercicios anteriores. Lo siguiente es el planteamiento de las relaciones entre observaciones y parámetros.

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \arctan \frac{y_C}{x_C}, \\
\alpha_1 &= \arctan \frac{y_B}{x_B} - \arctan \frac{y_C}{x_C}, \\
\beta_2 &= \arctan \frac{x_B}{y_B} + \arctan \frac{17{,}75 - x_B}{y_B}, \\
\alpha_2 &= \arctan \frac{y_B}{17{,}75 - x_B} - \arctan \frac{y_B - y_C}{x_C - x_B}, \\
\beta_3 &= \arctan \frac{y_C}{x_C} + \arctan \frac{y_B - y_C}{x_C - x_B}, \\
\alpha_3 &= \arctan \frac{x_C}{y_C} + \arctan \frac{17{,}75 - x_C}{y_C},
\end{aligned}
$$

$$\beta_4 = \arctan\frac{y_\mathrm{C}}{17{,}75 - x_\mathrm{C}} - \arctan\frac{y_\mathrm{B}}{17{,}75 - x_\mathrm{B}},$$
$$\alpha_4 = \arctan\frac{y_\mathrm{B}}{17{,}75 - x_\mathrm{B}}.$$

Estas expresiones no son las únicas posibles. Si como es habitual en un topógrafo, la ecuación de lectura y su linealización se conoce de memoria, se puden obtener las ecuaciones de ángulo como la resta de dos ecuaciones de lectura. Por ejemplo, la variación que en β_2 produce un pequeño cambio en x_B, es decir, $\partial\beta_2/\partial x_\mathrm{B}$, es igual a la variación que generaría en $\mathrm{L}_\mathrm{B}^\mathrm{A}$ menos la variación generada en $\mathrm{L}_\mathrm{B}^\mathrm{D}$; o sea, $\partial\beta_2/\partial x_\mathrm{B} = \partial\mathrm{L}_\mathrm{B}^\mathrm{A}/\partial x_\mathrm{B} - \partial\mathrm{L}_\mathrm{B}^\mathrm{D}/\partial x_\mathrm{B}$. Sea como fuere, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\beta_1 \approx \beta_{1_0} - \left(\frac{y_\mathrm{C}}{e^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{C} + \left(\frac{x_\mathrm{C}}{e^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{C},$$

$$\alpha_1 \approx \alpha_{1_0} - \left(\frac{y_\mathrm{B}}{a^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{B} + \left(\frac{x_\mathrm{B}}{a^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{B} + \left(\frac{y_\mathrm{C}}{e^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{C} - \left(\frac{x_\mathrm{C}}{e^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{C},$$

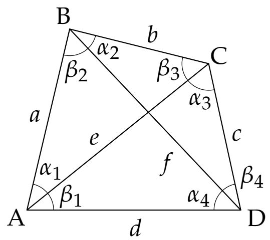
$$\beta_2 \approx \beta_{2_0} + \left(\frac{y_\mathrm{B}}{a^2} + \frac{y_\mathrm{B}}{f^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{B} - \left(\frac{x_\mathrm{B}}{a^2} + \frac{17{,}75 - x_\mathrm{B}}{f^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{B},$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 \approx \alpha_{2_0} &+ \left(\frac{y_\mathrm{B}}{f^2} - \frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{C}}{b^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{B} - \left(\frac{17{,}75 - x_\mathrm{B}}{f^2} + \frac{x_\mathrm{C} - x_\mathrm{B}}{b^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{B} \\ &+ \left(\frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{C}}{b^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{C} + \left(\frac{x_\mathrm{C} - x_\mathrm{B}}{b^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{C},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 \approx \beta_{3_0} &+ \left(\frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{C}}{b^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{B} + \left(\frac{x_\mathrm{C} - x_\mathrm{B}}{b^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{B} \\ &- \left(\frac{y_\mathrm{C}}{e^2} + \frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{C}}{b^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{C} + \left(\frac{x_\mathrm{C}}{e^2} - \frac{x_\mathrm{C} - x_\mathrm{B}}{b^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{C},\end{aligned}$$

$$\alpha_3 \approx \alpha_{3_0} + \left(\frac{y_\mathrm{C}}{c^2} + \frac{y_\mathrm{C}}{e^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{C} + \left(\frac{17{,}75 - x_\mathrm{C}}{c^2} - \frac{x_\mathrm{C}}{e^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{C},$$

$$\begin{aligned}\beta_4 \approx \beta_{4_0} &- \left(\frac{y_\mathrm{B}}{f^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{B} - \left(\frac{17{,}75 - x_\mathrm{B}}{f^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{B} \\ &+ \left(\frac{y_\mathrm{C}}{c^2}\right)_0 \Delta x_\mathrm{C} + \left(\frac{17{,}75 - x_\mathrm{C}}{c^2}\right)_0 \Delta y_\mathrm{C},\end{aligned}$$



$$\alpha_4 \approx \alpha_{40} + \left(\frac{y_B}{f^2}\right)_0 \Delta x_B + \left(\frac{17{,}75 - x_B}{f^2}\right)_0 \Delta y_B.$$

Como es muy fácil equivocarse en algún signo conviene comprobar en el gráfico que una variación en determinada coordenada produce para cierto ángulo una variación cuyo signo concuerda con el de la ecuación. Así por ejemplo, en el ángulo β_4 vemos que si x_b aumenta entonces β_4 disminuye.

A continuación se muestran los valores aproximados de los ángulos y los elementos L, en radianes. Los elementos L deben darse con el mismo número de decimales que tienen las observaciones. Al pasar de grados a radianes, para mantenter la precisión es necesario aumentar en dos el número de cifras decimales.

	Obs.	Apr.	L	(rad)
β_1	0,68444	0,68682	−0,00237	
α_1	0,66867	0,65289	0,01578	
β_2	0,97273	0,97746	−0,00473	
α_2	0,56798	0,56710	0,00088	
β_3	0,93175	0,94414	−0,01239	
α_3	1,09960	1,10394	−0,00433	
β_4	0,54208	0,52641	0,01567	
α_4	0,81600	0,82443	−0,00843	

La matriz A es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_B & y_B & x_C & y_C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \beta_1 \rightarrow \\ \alpha_1 \rightarrow \\ \beta_2 \rightarrow \\ \alpha_2 \rightarrow \\ \beta_3 \rightarrow \\ \alpha_3 \rightarrow \\ \beta_4 \rightarrow \\ \alpha_4 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -0{,}033 & 0{,}040 \\ -0{,}062 & 0{,}015 & 0{,}033 & -0{,}040 \\ 0{,}027 & -0{,}047 & \cdot & \cdot \\ 0{,}014 & -0{,}049 & 0{,}022 & 0{,}082 \\ 0{,}022 & 0{,}082 & -0{,}054 & -0{,}042 \\ \cdot & \cdot & -0{,}045 & -0{,}057 \\ -0{,}035 & -0{,}033 & 0{,}077 & 0{,}017 \\ 0{,}035 & 0{,}033 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array};$$

y la matriz N^{-1},

$$\begin{pmatrix} 254 & 2 & 139 & -82 \\ 2 & 142 & 56 & 60 \\ 139 & 56 & 183 & -51 \\ -82 & 60 & -51 & 129 \end{pmatrix};$$

El vector de incrementos y los valores ajustados son

	Δx	x (m)
x_B	−0,221	3,379
y_B	−0,027	15,273
x_C	0,088	15,088
y_C	0,009	12,309

y los residuos, ya en grados,

$$v_{\beta_1} = 0^g 009, \quad v_{\alpha_1} = 0^g 001, \quad v_{\beta_2} = -0^g 007, \quad v_{\alpha_2} = -0^g 007,$$
$$v_{\beta_3} = -0^g 014, \quad v_{\alpha_3} = 0^g 008, \quad v_{\beta_4} = 0^g 001, \quad v_{\alpha_4} = 0^g 016.$$

□

4. Cuadrilátero, ángulos y distancias ponderados

Tomando como medidas angulares y de distancia las de los ejercicios anteriores, ajustar la figura suponiendo las sigiuentes varianzas:

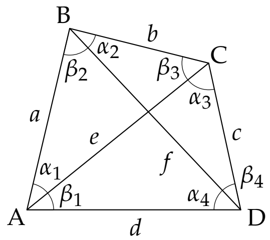
Para las distancias, $\sigma_S = 0{,}002 + 0{,}0001\,S$.

Para los ángulos, $\sigma_\alpha = 0^g 001 + 0^g 2/S$.

➡ Aplicando las expresiones anteriores resultan las siguientes varianzas para cada observación:

$$\sigma_a = 0{,}0036, \quad \sigma_b = 0{,}0032, \quad \sigma_c = 0{,}0033,$$
$$\sigma_c = 0{,}0038, \quad \sigma_e = 0{,}0039, \quad \sigma_f = 0{,}0041;$$

$$\sigma_{\beta_1} = 0^g 006 = 0{,}00009, \quad \sigma_{\alpha_1} = 0^g 006 = 0{,}00009,$$
$$\sigma_{\beta_2} = 0^g 004 = 0{,}00007, \quad \sigma_{\alpha_1} = 0^g 007 = 0{,}00010,$$



$$\sigma_{\beta_3} = 0^g004 = 0{,}00007,$$
$$\sigma_{\alpha_3} = 0^g004 = 0{,}00006,$$
$$\sigma_{\beta_4} = 0^g007 = 0{,}00011,$$
$$\sigma_{\alpha_4} = 0^g005 = 0{,}00008.$$

Los parámetros serán x_B, y_B, x_C, y_C y x_D. De los ejercicios anteriores ya tenemos calculada la matriz A y el vector L, salvo las derivadas respecto de x_D de las observaciones angulares, que son:

$$\frac{\partial\beta_2}{\partial x_\mathrm{D}} = 0{,}035, \qquad \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_\mathrm{D}} = -0{,}035, \qquad \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_\mathrm{D}} = 0{,}077,$$
$$\frac{\partial\beta_4}{\partial x_\mathrm{D}} = -0{,}042, \qquad \frac{\partial\alpha_4}{\partial x_\mathrm{D}} = -0{,}035.$$

Las que no se muestran son cero.

Tras dividir cada fila de la matriz A y del vector L por su correspondiente σ resultan las matrices A$'$ y L$'$. Si hemos tomado $\sigma_0 = 1$ los residuos v' tienen todos desviación típica 1, por lo que los elementos del vector L$'$ se darán siempre con exactamente un decimal:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_\mathrm{B} & y_\mathrm{B} & x_\mathrm{C} & y_\mathrm{C} & x_\mathrm{D} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} a \to \\ b \to \\ c \to \\ d \to \\ e \to \\ f \to \\ \beta_1 \to \\ \alpha_1 \to \\ \beta_2 \to \\ \alpha_2 \to \\ \beta_3 \to \\ \alpha_3 \to \\ \beta_4 \to \\ \alpha_4 \to \end{array} &
\begin{pmatrix}
64 & 273 & \cdot & \cdot & \cdot \\
-304 & 80 & 304 & -80 & \cdot \\
\cdot & \cdot & -67 & 299 & 67 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 265 \\
\cdot & \cdot & 196 & 161 & \cdot \\
-166 & 180 & \cdot & \cdot & 166 \\
\cdot & \cdot & -372 & 454 & \cdot \\
-692 & 163 & 365 & -445 & \cdot \\
402 & -710 & \cdot & \cdot & 530 \\
133 & -482 & 210 & 800 & -343 \\
314 & 1195 & -790 & -614 & \cdot \\
\cdot & \cdot & -739 & -944 & 1278 \\
-330 & -305 & 725 & 162 & -395 \\
462 & 428 & \cdot & \cdot & -462
\end{pmatrix},
\qquad
\begin{pmatrix}
-25{,}4 \\ 89{,}3 \\ -6{,}0 \\ -3{,}4 \\ 15{,}7 \\ 27{,}1 \\ -27{,}0 \\ 176{,}3 \\ -71{,}2 \\ 8{,}6 \\ -180{,}5 \\ -71{,}5 \\ 146{,}8 \\ -110{,}7
\end{pmatrix}.
\end{array}$$

La nueva matriz N^{-1} es

$$10^{-6}\begin{pmatrix} 1{,}68 & 0{,}68 & 1{,}49 & 0{,}06 & 0{,}84 \\ 0{,}68 & 2{,}19 & 2{,}00 & 1{,}48 & 2{,}15 \\ 1{,}49 & 2{,}00 & 3{,}05 & 0{,}96 & 2{,}35 \\ 0{,}06 & 1{,}48 & 0{,}96 & 1{,}80 & 1{,}74 \\ 0{,}84 & 2{,}15 & 2{,}35 & 1{,}74 & 2{,}89 \end{pmatrix}.$$

El vector de incrementos y los valores ajustados son

	Δx	x (m)
x_B	−0,224	3,376
y_B	−0,039	15,261

	Δx	x (m)
x_C	0,077	15,077
y_C	0,000	12,300
x_D	−0,013	17,737

y los residuos v',

$$v'_a = -0{,}4, \quad v'_b = 0{,}9, \quad v'_c = 0{,}1,$$
$$v'_d = 0{,}0, \quad v'_e = 0{,}6, \quad v'_f = -0{,}9;$$

$$v'_{\beta_1} = 1{,}8, \quad v'_{\alpha_1} = -0{,}4, \quad v'_{\beta_2} = -2{,}0, \quad v'_{\alpha_2} = -1{,}0,$$
$$v'_{\beta_3} = -2{,}6, \quad v'_{\alpha_3} = 1{,}9, \quad v'_{\beta_4} = 0{,}0, \quad v'_{\alpha_4} = 3{,}5.$$

Los residuos v' son adimensionales y corrependientes a observaciones con desviación típica σ_0. Por ello son todos comparables entre sí, y si $\sigma_0 = 1$ se darán con uno o dos decimales. Esta última posibilidad se justifica por el hecho de que la precisión de los residuos, es decir, de los valores ajustados de las observaciones, es mejor que la de los valores observados, y mejor será cuanto mayor sea la redundancia, y para no perder precisión puede ser necesario o conveniente aportar dos cifras decimales. En concreto, la precisión media de los residuos v' es $\sigma_0\sqrt{1 - r/m}$. Los residuos en sus unidades originales son

$$v'_a = -0{,}0016, \quad v'_b = 0{,}0027, \quad v'_c = 0{,}0002,$$
$$v'_d = 0{,}0001, \quad v'_e = 0{,}0023, \quad v'_f = -0{,}0036;$$

$$v'_{\beta_1} = 0^g010, \quad v'_{\alpha_1} = -0^g002, \quad v'_{\beta_2} = -0^g008,$$
$$v'_{\alpha_2} = -0^g007, \quad v'_{\beta_3} = -0^g011, \quad v'_{\alpha_3} = 0^g007,$$
$$v'_{\beta_4} = -0^g000, \quad v'_{\alpha_4} = 0^g017.$$

□

† 5. Significado del peso

a) Demostrar que p observaciones con peso unidad de una misma magnitud se pueden substituir por una única observación con peso p y cuyo valor es la media aritmética de las medidas originales.

b) Demostrar que una observación con un peso $p \in \mathbb{N}$ es de cara a un ajuste mínimo cuadrático equivalente a p observaciones. (La extensión de este concepto a pesos $p \notin \mathbb{N}$ se encuentra explicada en la nota al pie de [pp. 66–67].)

***a*)** Sean $\ell_1,\ldots,\ell_p$ las observaciones. La solución mínimo cuadrática es la solución del sistema $\mathrm{NX}_\Delta = \mathrm{A}'^{\mathsf{T}}\mathrm{L}'$. Vamos a ver que las matrices $\mathrm{N} = \mathrm{A}'^{\mathsf{T}}\mathrm{A}'$ y $\mathrm{A}'^{\mathsf{T}}\mathrm{L}'$ son las mismas con las observaciones originales que con la observación media equivalente.

Los elementos de la matriz N se obtienen como la suma de productos de pares de elementos de la matriz A′, estando esos pares formados por elementos de una misma fila. En concreto, $n_{ij} = \sum\limits_k a'_{ki}a'_{kj}$. Para cada valor de k los elementos a'_{ki} y a'_{kj} pertenecen a una misma fila, a una misma ecuación y, dentro de la ecuación, los índices i y j determinan concretamente de qué elementos se trata. Por lo tanto, un elemento n_{ij} se obtiene acumulando los productos de los coeficientes i y j de cada ecuación linealizada.

En el primer caso existen p ecuaciones de residuo que sólo se diferencian en el término independiente. Sean en ellas los coeficientes de las incógnitas $a_1,\ldots,a_n$, iguales en todas ellas. La contribución de estas ecuaciones a la matriz N es $\sum_{k=1}^{p} a_i a_j = p\, a_i a_j$. Si en lugar de estas ecuaciones empleamos la ecuación equivalente, los valores a siguen siendo los mismos, pero al considerar que el peso de la medida es p entonces, al establecer las ecuaciones v', los coeficientes pasan a ser $a'_i = \frac{a_i}{1/\sqrt{p}}$. El aporte de esta ecuación al elemento n_{ij} de la matriz N es $a'_i a'_j = p\, a_i a_j$: la matriz N no varía.

En lo referente al vector $\mathrm{A}'^{\mathsf{T}}\mathrm{L}'$, sus elementos se obtienen como suma de los productos de los coeficientes a'_i por los términos independientes L'. Empleando la observación media ya vimos que $a'_i = \sqrt{p}\, a_i$.

Por lo que respecta a L',

$$\text{L}' = \frac{1}{1/\sqrt{p}} \, \frac{\text{L}_1 + \cdots + \text{L}_p}{p} = \frac{\text{L}_1 + \cdots + \text{L}_p}{\sqrt{p}},$$

y la contribución de la ecuación al elemento i del vector $\text{A}'^{\text{T}}\text{L}'$ es pues $a_i(\text{L}_1 + \cdots + \text{L}_p)$. Con las observaciones originales la contribución es $a_i\text{L}_1 + \cdots + a_i\text{L}_n = a_i(\text{L}_1 + \cdots + \text{L}_p)$; es decir, la misma.

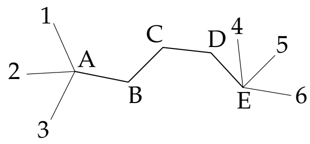
Hemos demostrado que el sistema $\text{NX}_\Delta = \text{A}'^{\text{T}}\text{L}'$ permanece constante con el cambio y en consecuencia el primer conjunto de ecuaciones (observaciones) es equivalente a la ecuación (observación) media con peso p.

***b*)** Efectuando el proceso inverso tenemos que una observación con peso $p \in \mathbb{N}$ es equivalente a p observaciones de peso 1 y cuya media sea la observación original. En particular, p observaciones iguales a la original. □

Es importante tener siempre presente que esta equivalencia solamente se da para la solución mínimo cuadrática.

9

1. Poligonal



La figura representa una poligonal en la que los valores observados son los siguientes:

$$L_A^1 = 272^g1700, \quad L_A^2 = 189^g2366,$$

$$\begin{array}{lll} L_A^3 = 129^g9694, & L_A^B = 11^g9539, & L_B^A = 162^g1702, \\ L_B^C = 334^g7889, & L_C^B = 264^g6489, & L_C^D = 52^g9759, \\ L_D^C = 23^g2462, & L_D^E = 302^g2348, & L_E^D = 92^g9263, \\ L_E^4 = 126^g4627, & L_E^5 = 189^g9160, & L_E^6 = 258^g0864; \end{array}$$

$$S_A^B = 204{,}194, \quad S_B^C = 133{,}597, \quad S_C^D = 197{,}530, \quad S_D^E = 176{,}695.$$

Se conocen además los siguientes valores:

$$\begin{array}{lll} \theta_A^1 = 372^g8447, & \theta_A^2 = 289^g9108, & \theta_A^3 = 230^g6450, \\ \theta_E^4 = 386^g1025, & \theta_E^5 = 49^g5563, & \theta_E^4 = 117^g7266; \end{array}$$

$$X_A = 180{,}025, \quad Y_A = 180{,}280, \quad X_E = 810{,}788, \quad Y_E = 120{,}494.$$

Como las distancias son muy parecidas podemos tomar el mismo valor de σ para todas las observaciones. Para las de lectura es 0^g0008, y también tomaremos este valor para las lecturas de azimut conocido. Para las distancias será 0,004 (como siempre, todo está en metros).

➡ Los parámetros que definen el problema de manera más sencilla son los siguientes:

$$\Sigma_A, \quad X_B, Y_B, \Sigma_B, \quad X_C, Y_C, \Sigma_C, \quad X_D, Y_D, \Sigma_D, \quad \Sigma_E.$$

En A y en E podemos calcular dessorientaciones aproximadas a partir de las lecturas de azimut conocido. Los valores que se deducen a partir de cada observación son los siguientes:

$$\begin{aligned} \Sigma_A^1 &= 100^g6747, & \Sigma_A^1 &= 100^g6742, & \Sigma_A^3 &= 100^g6756; \\ \Sigma_E^4 &= 259^g6398, & \Sigma_E^5 &= 259^g6403, & \Sigma_E^6 &= 259^g6402. \end{aligned}$$

Estos valores son aceptables para una precisión de 0^g0008. Los valores medios son

$$\Sigma_A^{1,2,3} = 100^g6748, \qquad \Sigma_E^{4,5,6} = 259^g6401.$$

Con este valor de Σ_A podemos obtener un valor de θ_A^B y unas coordenadas para B:

$$\theta_A^B \approx 112^g6287; \qquad \Delta X_A^B \approx 200{,}19, \quad \Delta Y_A^B \approx -40{,}24;$$

de donde

$$X_B \approx 380{,}22, \qquad Y_B \approx 140{,}04.$$

Continuando los cálculos se obtienen sucesivamente los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \theta_B^A &\approx 332^g6287, & \Sigma_B &\approx 150^g4584, & \theta_B^C &\approx 85^g2474; \\ X_C &\approx 510{,}25, & Y_C &\approx 170{,}72. \end{aligned}$$

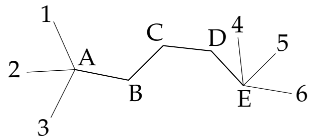
Calculando el punto D desde E obtenemos los siguientes valores:

$$\Sigma_D \approx 250^g3316, \qquad X_D \approx 690{,}98, \qquad Y_D \approx 250{,}37.$$

Redondeando, podemos tomar los siguientes valores aproximados:

$$\begin{aligned} \Sigma_{A0} &= 100^g67, \\ \Sigma_{B0} &= 150^g46, & X_{B0} &= 380, & Y_{B0} &= 140, \\ \Sigma_{C0} &= 20^g60, & X_{C0} &= 510, & Y_{C0} &= 170, \\ \Sigma_{D0} &= 250^g33, & X_{D0} &= 691, & Y_{D0} &= 250, \\ \Sigma_{E0} &= 259^g64. \end{aligned}$$

Las coordenadas de A y E no se pueden redondear, ya que son valores conocidos no susceptibles de variación.



Para los anteriores valores aproximados, los valores aproximados de las observaciones y los valores L son

	Obs.	Apr.	L (m)
S_A^B	204,194	203,992	0,2024
S_B^C	133,597	133,417	0,1808
S_C^D	197,530	197,891	−0,3611
S_D^E	176,695	176,411	0,2834

	Obs.	Apr.	L	L (rad)
L_A^1	272^g1700	272^g1747	-0^g0047	$-74\cdot10^{-6}$
L_A^2	189^g2366	189^g2408	-0^g0042	$-66\cdot10^{-6}$
L_A^3	129^g9694	129^g9750	-0^g0056	$-88\cdot10^{-6}$
L_A^B	11^g9539	11^g9839	-0^g0299	$-470\cdot10^{-6}$
L_B^A	162^g1702	162^g1939	-0^g0237	$-372\cdot10^{-6}$
L_B^C	334^g7889	335^g1015	-0^g3127	$-4912\cdot10^{-6}$
L_C^B	264^g6489	264^g9620	-0^g3126	$-4910\cdot10^{-6}$
L_C^D	52^g9759	52^g9060	0^g0702	$1103\cdot10^{-6}$
L_D^C	23^g2462	23^g1757	0^g0705	$1108\cdot10^{-6}$
L_D^E	302^g2348	302^g1506	0^g0842	$1322\cdot10^{-6}$
L_E^D	92^g9263	92^g8406	0^g0858	$1347\cdot10^{-6}$
L_E^4	126^g4627	126^g4625	0^g0002	$3\cdot10^{-6}$
L_E^5	189^g9160	189^g9163	-0^g0003	$-5\cdot10^{-6}$
L_E^6	258^g0864	258^g0866	-0^g0002	$-3\cdot10^{-6}$

Las observaciones de lectura desde una estación a direcciones de azimut conocido se pueden agrupar en una sola: Tener una observación de lectura L a una dirección de azimut conocido θ con una precisión σ es lo mismo que tener una observación de la desorientación $\Sigma = \theta - L$ con la misma precisión σ; por otra parte, si en un ajuste mínimo cuadrático se tienen n observaciones de una misma magnitud, con precisión σ, se pueden sustituir por una única igual a su promedio y de precisión $\sigma/\sqrt{n}$. Es importante recordar que esta sustitución sólo se puede llevar a cabo en un ajuste mínimo cuadrático; para otro tipo de ajuste el resultado será en general distinto.

Así pues, en lugar de los valores $L_A^1 \ldots L_E^6$, tomamos como observaciones originales, de cara la ajuste, las «medidas» $\Sigma_A^{1,2,3}$ y $\Sigma_E^{4,5,6}$, con precisión $\sigma/\sqrt{3} = 0^g00046$.

	Obs.	Apr.	L	L (rad)
$\Sigma_A^{1,2,3}$	100^g6748	100^g6700	0^g0048	$75 \cdot 10^{-6}$
$\Sigma_E^{4,5,6}$	259^g6401	259^g6400	0^g0001	$2 \cdot 10^{-6}$

Al tratarse de uno de esos casos en los que se observa directamente un parámetro la ecuación de residuo es la más sencilla posible:

$$v_{\Sigma_A^{1,2,3}} = \Sigma_A^{1,2,3} - \mathit{\Sigma}_A = \mathrm{L} - 1\Delta\mathit{\Sigma}_A$$

La matriz A antes de dividir cada fila por su precisión es

$$\begin{array}{r l}
 & \begin{array}{ccccccc} x_B & y_B & x_C & y_C & x_D & y_D & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{array} \\
\begin{array}{r} \Sigma_A^{1,2,3} \\ \Sigma_E^{4,5,6} \\ L_A^B \\ L_B^A \\ L_B^C \\ L_C^B \\ L_C^D \\ L_D^C \\ L_D^E \\ L_E^D \\ S_A^B \\ S_B^C \\ S_C^D \\ S_D^E \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
-0{,}0010 & -0{,}0048 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
-0{,}0010 & -0{,}0048 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
-0{,}0017 & 0{,}0073 & 0{,}0017 & -0{,}0073 & \cdot & \cdot & \cdots \\
-0{,}0017 & 0{,}0073 & 0{,}0017 & -0{,}0073 & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & -0{,}0020 & 0{,}0046 & 0{,}0020 & -0{,}0046 & \cdots \\
\cdot & \cdot & -0{,}0020 & 0{,}0046 & 0{,}0020 & -0{,}0046 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}0042 & 0{,}0038 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}0042 & 0{,}0038 & \cdots \\
0{,}98 & -0{,}20 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
-0{,}97 & -0{,}22 & 0{,}97 & 0{,}22 & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & -0{,}91 & -0{,}40 & 0{,}91 & 0{,}40 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}68 & 0{,}73 & \cdots
\end{array}\right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl}
 & \Sigma_A & \Sigma_B & \Sigma_C & \Sigma_D & \Sigma_E & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\cdots & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_A^{1,2,3} \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \Sigma_E^{4,5,6} \\
\cdots & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & L_A^B \\
\cdots & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & L_B^A \\
\cdots & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & L_B^C \\
\cdots & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & L_C^B \\
\cdots & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & L_C^D \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & L_D^C \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & L_D^E \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & L_E^D \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_A^B \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_B^C \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_C^D \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_D^E
\end{array}$$

En lo sucesivo no se mostrarán las columnas correspondientes a parámetros de desorientación.

Hay que dividir cada fila de esta matriz y del vector L por la precisión de la observación. Para las lecturas es

$$0{,}0008/200\,\pi = 16\cdot 10^{-6},$$

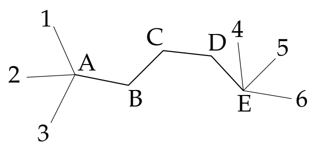
y para $\Sigma_A^{1,2,3}$ y $\Sigma_E^{4,5,6}$ es $16\cdot 10^{-6}/\sqrt{3} = 7\cdot 10^{-6}$. Se otienen así A′ y L′. La matriz N es $A'^{\mathsf{T}}A'$, y N^{-1} se muestra en la página siguiente.

El vector de incrementos y los valores ajustados son

	Δx	x (m)
X_B	0,208	380,208
Y_B	0,038	140,038
X_C	0,231	510,231
Y_C	0,716	170,716
X_D	−0,015	690,985
Y_D	0,367	250,367

	Δx (rad)	Δx	x
Σ_A	$79\cdot 10^{-6}$	0^g0050	100^g6750
Σ_B	$-7\cdot 10^{-6}$	-0^g0005	150^g4595
Σ_C	$2\cdot 10^{-6}$	0^g0002	20^g6002
Σ_D	$10\cdot 10^{-6}$	0^g0009	250^g3309
Σ_E	$1\cdot 10^{-6}$	0^g0001	259^g6401

Los residuos se obtienen bien como $V' \approx L' - A'X_\Delta$ o bien como $V \approx L - AX_\Delta$. Conviene acostumbrarse a obtener primero los v', y una vez analizados, si procede, obtener v, multiplicando cada v'_i por σ_i/σ_0. Obsérvese que para pasar los residuos de lectura a sus unidades no es necesario hacer escala en el punto intermedio de los radia-



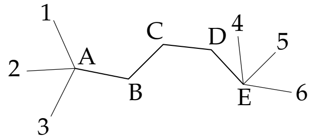
nes. En este ejercicio $\sigma_L = 0^g 0008$ y $\sigma_0 = 1$, así que multiplicando los v' por 0,0008 se pasan estas cantidades a grados.

	v'	v (m)
S_A^B	1,5	0,006
S_B^C	1,5	0,006

	v'	v (m)
S_C^D	1,4	0,006
S_D^E	0,9	0,004

$$N^{-1} = \left(\begin{array}{rrrrrrc}
11266 & -999 & 6684 & -1116 & 2366 & -1860 & \cdots \\
-999 & 4535 & -1176 & 4714 & -1186 & 2835 & \cdots \\
6684 & -1176 & 13130 & 80 & 5232 & -3212 & \cdots \\
-1116 & 4714 & 80 & 7515 & -2055 & 4832 & \cdots \\
2366 & -1186 & 5232 & -2055 & 8904 & -4267 & \cdots \\
-1860 & 2835 & -3212 & 4832 & -4267 & 6905 & \cdots \\
-1{,}5 & -5{,}2 & -0{,}2 & -5{,}4 & 0{,}9 & -3{,}0 & \cdots \\
-6{,}5 & -11{,}2 & 0{,}4 & -20{,}0 & 7{,}3 & -14{,}3 & \cdots \\
-6{,}1 & 3{,}5 & 0{,}4 & -5{,}2 & 14{,}5 & -14{,}3 & \cdots \\
-1{,}3 & 7{,}3 & 4{,}2 & 9{,}0 & 19{,}2 & -1{,}5 & \cdots \\
0{,}7 & 1{,}5 & 2{,}4 & 2{,}5 & 5{,}2 & 2{,}2 & \cdots
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{crrrrr}
\cdots & -1{,}5 & -6{,}5 & -6{,}1 & -1{,}3 & 0{,}7 \\
\cdots & -5{,}2 & -11{,}2 & 3{,}5 & 7{,}3 & 1{,}5 \\
\cdots & -0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 4{,}2 & 2{,}4 \\
\cdots & -5{,}4 & -20{,}0 & -5{,}2 & 9{,}0 & 2{,}5 \\
\cdots & 0{,}9 & 7{,}3 & 14{,}5 & 19{,}2 & 5{,}2 \\
\cdots & -3{,}0 & -14{,}3 & -14{,}3 & -1{,}5 & 2{,}2 \\
\cdots & 0{,}046 & 0{,}015 & -0{,}003 & -0{,}008 & -0{,}002 \\
\cdots & 0{,}015 & 0{,}147 & 0{,}032 & -0{,}019 & -0{,}006 \\
\cdots & -0{,}003 & 0{,}032 & 0{,}152 & 0{,}038 & 0{,}001 \\
\cdots & -0{,}008 & -0{,}019 & 0{,}038 & 0{,}156 & 0{,}019 \\
\cdots & -0{,}002 & -0{,}006 & 0{,}001 & 0{,}019 & 0{,}047
\end{array}\right) \times 10^{-9}$$



	v'	v
$\Sigma_A^{1,2,3}$	$-0{,}4$	$-0^g 0002$
$\Sigma_E^{4,5,6}$	$0{,}1$	$0^g 0000$

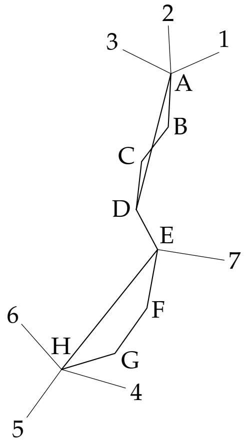
	v'	v
L_A^B	$-0{,}6$	$-0^g 0005$
L_B^A	$0{,}4$	$0^g 0003$
L_B^C	$-0{,}4$	$-0^g 0003$
L_C^B	$0{,}5$	$0^g 0004$

	v'	v
L_C^D	$-0{,}5$	$-0^g 0004$
L_D^C	$0{,}8$	$0^g 0006$
L_D^E	$-0{,}8$	$-0^g 0006$
L_E^D	$-0{,}2$	$0^g 0001$

□

Estos residuos muestran un comportamiento que ya sabíamos, y es que la suma de los residuos de lectura de una estación (si la desorientación es una incógnita) suman cero (cf. [p. 83]). En las estaciones A y E también se cumple si tenemos en cuenta los pesos; es decir, $\sum pv = 0$ –esto es así porque una observación con peso p es como una observación repetida p veces ([p. 66])–, y que las observaciones de desorientación son, en lo que respecta a Σ, opuestas a las de lectura, y deben ir restadas en vez de sumadas.

2. Poligonal reforzada



Esta es una poligonal algo más larga que la anterior y con lecturas adicionales que refuerzan su estructura. Los siguientes valores son concidos:

$$\begin{aligned} X_A &= 459{,}335, & Y_A &= 1990{,}452, \\ X_H &= 10{,}937, & Y_H &= 776{,}495, \\ X_7 &= 981{,}578, & Y_7 &= 1176{,}332; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_A^1 &= 75^g 1205, & \theta_A^2 &= 392^g 4309, \\ \theta_A^3 &= 336^g 3918, & \theta_H^4 &= 123^g 6950, \\ \theta_H^5 &= 248^g 3345, & \theta_H^6 &= 350^g 1801. \end{aligned}$$

La precisión de las medidas depende de la distancia. Para las lecturas angulares es

$$\sigma_{\mathrm{L}}^2 = 0^g0005^2 + (0^g6/\mathrm{S})^2,$$

y para las de distancia, $\sigma_{\mathrm{S}}^2 = 0{,}01^2 + (8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{S})^2 \quad (\mathrm{m})$.

En ambos casos S debe introducirse en metros en la fórmula. Para las lecturas desde A y H de azimut conocido, así como para $\mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{7}$, tomar $\sigma_{\mathrm{L}} = 0^g0020$.

Los valores observados son

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{1} = 226^g6307, & \mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{2} = 143^g9422, & \mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{3} = 87^g9016, \\
\mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = 354^g6915, & \mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{D}} = 367^g4004, & \mathrm{L}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} = 337^g9519, \\
\mathrm{L}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} = 176^g5166, & \mathrm{L}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} = 178^g6833, & \mathrm{L}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} = 343^g9873, \\
\mathrm{L}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} = 21^g8187, & \mathrm{L}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{E}} = 183^g5765, & \mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{7} = 302^g3847, \\
\mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}} = 161^g0903, & \mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{F}} = 17^g0046, & \mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{H}} = 35^g2378, \\
\mathrm{L}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}} = 351^g4231, & \mathrm{L}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{G}} = 151^g5743, & \mathrm{L}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{F}} = 68^g3948, \\
\mathrm{L}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{H}} = 324^g9753, & \mathrm{L}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{E}} = 256^g6019, & \mathrm{L}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}} = 295^g0925, \\
\mathrm{L}_{\mathrm{H}}^{4} = 337^g3432, & \mathrm{L}_{\mathrm{H}}^{5} = 61^g9837, & \mathrm{L}_{\mathrm{H}}^{6} = 163^g8300;
\end{array}$$

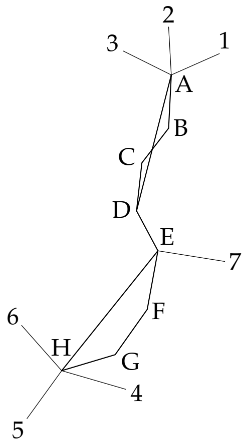
$$\begin{array}{llll}
\mathrm{S}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = 219{,}012, & \mathrm{S}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{D}} = 575{,}586, & \mathrm{S}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} = 179{,}365, & \mathrm{S}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} = 198{,}069, \\
\mathrm{S}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{E}} = 185{,}926, & \mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{F}} = 259{,}961, & \mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{H}} = 630{,}237, & \mathrm{S}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{G}} = 201{,}062, \\
\mathrm{S}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{H}} = 228{,}362. & & &
\end{array}$$

a) Calcular unos valores aproximados.
b) Obtener la solución mínimo cuadrática.

***a*)** Comenzamos en primer lugar por promediar las desorientaciones deducidas a partir de las observaciones de azimut conocido, desde A y desde H:

$$\begin{array}{lll}
\Sigma_{\mathrm{A}}^{1} = 248^g4898, & \Sigma_{\mathrm{A}}^{2} = 248^g4887, & \Sigma_{\mathrm{A}}^{3} = 248^g4902, \\
\Sigma_{\mathrm{H}}^{4} = 186^g3518, & \Sigma_{\mathrm{H}}^{5} = 186^g3508, & \Sigma_{\mathrm{H}}^{6} = 186^g3501;
\end{array}$$

de donde $\Sigma_{\mathrm{A}}^{1,2,3} = 248^g4896$ y $\Sigma_{\mathrm{H}}^{4,5,6} = 186^g3509$.



Los valores aproximados es mejor calcularlos por el camino más corto posible. Desde A podemos calcular coordenadas para B y D; desde B, con la lectura hacia A, desorientación en él; a partir de B, las de C, y con la lectura de éste a B, desorientación; azimut de C a D, y con la lectura L_D^C, desorientación en D. No podemos calcular Σ_D a partir de la lectura de D hacia A porque no existe. Por otra parte, a partir de H calculamos las coordenadas de G y E, y a partir de G las de F. Para estos tres puntos con las lecturas desde ellos a los puntos desde los que fueron calculados se obtienen sus azimutes.

Llevamos a cabo en primer lugar el cálculo de los azimutes, que es independiente de la obtención de las coordenadas. Se van obteniendo los siguientes valores (de izquierda a derecha y de arriba a abajo):

$$\theta_A^B = 203^g 1811, \quad \theta_A^D = 215^g 8900, \quad \Sigma_B = 65^g 2292,$$
$$\theta_B^C = 241^g 7458, \quad \Sigma_C = 263^g 0625, \quad \theta_C^D = 207^g 0498,$$
$$\Sigma_D = 385^g 2311;$$

$$\theta_H^G = 81^g 4434, \quad \theta_H^E = 42^g 9528, \quad \Sigma_G = 356^g 4681,$$
$$\theta_G^F = 24^g 8629, \quad \Sigma_F = 73^g 2886, \quad \Sigma_E = 207^g 7150.$$

□

No es necesario obtener más valores, además de ser inútil (salvo para comprobar cierres). Puede incluso dar lugar a error. Es un fallo habitual calcular distancias y lecturas, para calcular los términos L, con los valores observados en lugar de con los aproximados. Así por ejemplo, si se calculan las coordenadas de D desde A y las de C por el camino A–B–C, no puede luego obtenerse el valor $(\theta_C^D)_0$ por el camino A–B–C–L_C^D. Este es el camino que hemos seguido para el cálculo de $(\Sigma_D)_0$, pero una cosa es el cálculo de valores aproximados y otra el de los términos L. Estos han de obtenerse siempre a partir de aquellos, pues es la esencia misma de la resolución aproximada por linealización; sin embargo, los valores aproximados se pueden obtener por cualquier camino, incluyendo —según se mencionó en el libro de teoría— croquis o valores obtenidos anteriormente. Su obtención a partir de las observaciones es una opción más, y nunca habrá riesgo de obtener unos valores incoherentes, pues los parámetros son, por definición, un conjunto mínimo; un conjunto en cantidad igual al número de grados de libertad del problema, que para cualesquiera valores que tomen queda determinada de manera única la figura, una solución.

Una vez obtenidos, por el camino que sea, un conjunto de valores aproximados, los valores aproximados de las observaciones se han de derminar a partir de ellos. Ocurrirá, claro, que si los valores aproximados se han obtenido a partir de las observaciones habrá algunos términos L que valgan cero, y podemos saber a priori cuáles van a ser sin más que atender a las observaciones que se emplearon para calcular los valores aproximados. Pero en cuanto estas observaciones no constituyan un conjunto mínimo, como suele ser el caso, es muy fácil equivocarse en la apreciación de qué observaciones fueron empleadas para obtener tales valores aproximados, y es por ello mejor, una vez que se tienen los valores aproximados de los parámetros, olvidarse por completo de cómo se calcularon y obtener a partir de ellos los valores L_0. Mas aún, ésta será normalmente la solución más sencilla, pues se llevará a cabo de manera automatizada mediante una aplicación informática. La obtención en su caso de términos L iguales a cero servirá de comprobación.

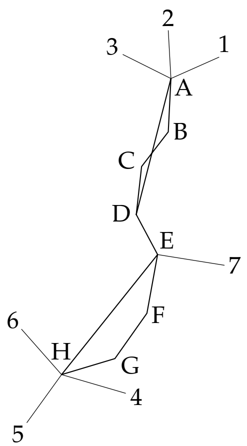
Por lo que respecta a la comprobación de los cierres, si todos los valores aproximados se calcularon a partir de observaciones los propios términos L son, todos y cada uno, un error de cierre.

***b*)** Volviendo al problema que nos ocupa, calculando los valores aproximados de las coordenadas como más arriba se describió se van obteniendo los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
\Delta X_A^B &= -10{,}939, & \Delta Y_A^B &= -218{,}739, & X_B &= 448{,}396,\\
Y_B &= 1771{,}713, & \Delta X_A^D &= -142{,}179, & \Delta Y_A^D &= -557{,}749,\\
X_D &= 317{,}156, & Y_D &= 1432{,}703, & \Delta X_B^C &= -109{,}367,\\
\Delta Y_B^C &= -142{,}164, & X_C &= 339{,}029, & Y_C &= 1629{,}549;\\
\Delta X_H^G &= 218{,}729, & \Delta Y_H^G &= 65{,}626, & X_G &= 229{,}666,\\
Y_G &= 842{,}121, & \Delta X_H^E &= 393{,}686, & \Delta Y_H^E &= 492{,}148,\\
X_E &= 404{,}623, & Y_E &= 1268{,}643, & \Delta X_G^F &= 76{,}543,\\
\Delta Y_G^F &= 185{,}922, & X_F &= 306{,}209, & Y_F &= 1028{,}043.
\end{aligned}$$

Así pues el conjunto de valores aproximados de los parámetros es

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{A0} = 248^g 4896,\\
&\Sigma_{B0} = 65^g 2292, \qquad X_{B0} = 448{,}396, \qquad Y_{B0} = 1771{,}713,
\end{aligned}$$



$$\Sigma_{C0} = 263^{g}0625, \qquad \Sigma_{D0} = 385^{g}2311,$$
$$X_{C0} = 339{,}029, \qquad X_{D0} = 317{,}156,$$
$$Y_{C0} = 1629{,}549, \qquad Y_{D0} = 1432{,}703,$$
$$\Sigma_{E0} = 207^{g}7150, \qquad \Sigma_{F0} = 73^{g}2886,$$
$$X_{E0} = 404{,}623, \qquad X_{F0} = 306{,}209,$$
$$Y_{E0} = 1268{,}643, \qquad Y_{F0} = 1028{,}043,$$
$$\Sigma_{G0} = 356^{g}4681,$$
$$X_{G0} = 229{,}666, \qquad Y_{G0} = 842{,}121,$$
$$\Sigma_{H0} = 186^{g}3509.$$

Estos valores, junto con los valores reales conocidos, son los que determinan los valores aproximados L_0 de las observaciones. Éstos y los valores L son

	Obs.	Apr.	L	L (rad)
$\Sigma_A^{1,2,3}$	$248^{g}4896$	$248^{g}4896$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
L_A^B	$354^{g}6915$	$354^{g}6915$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
L_A^D	$367^{g}4004$	$367^{g}4004$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
L_B^A	$337^{g}9519$	$337^{g}9519$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
L_B^C	$176^{g}5166$	$176^{g}5166$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
L_C^B	$178^{g}6833$	$178^{g}6833$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
L_C^D	$343^{g}9873$	$343^{g}9823$	$0^{g}0050$	$78\cdot10^{-6}$
L_D^C	$21^{g}8187$	$21^{g}8137$	$0^{g}0050$	$78\cdot10^{-6}$
L_D^E	$183^{g}5765$	$183^{g}5868$	$-0^{g}0103$	$-161\cdot10^{-6}$
L_E^7	$302^{g}3847$	$302^{g}3851$	$-0^{g}0004$	$-7\cdot10^{-6}$
L_E^D	$161^{g}0903$	$161^{g}1028$	$-0^{g}0125$	$-197\cdot10^{-6}$
L_E^F	$17^{g}0046$	$17^{g}0032$	$0^{g}0014$	$22\cdot10^{-6}$
L_E^H	$35^{g}2378$	$35^{g}2378$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
L_F^E	$351^{g}4231$	$351^{g}4296$	$-0^{g}0065$	$-102\cdot10^{-6}$
L_F^G	$151^{g}5743$	$151^{g}5743$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
L_G^F	$68^{g}3948$	$68^{g}3948$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$

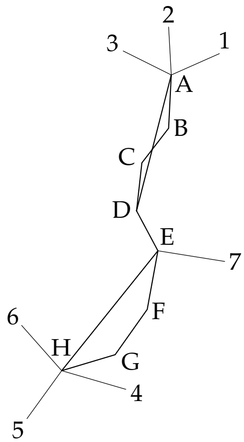
	Obs.	Apr.	L	L (rad)
L_G^H	324^g9753	324^g9753	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_H^E	256^g6019	256^g6019	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_H^G	295^g0925	295^g0925	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
$\Sigma_H^{4,5,6}$	186^g3509	186^g3509	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$

	Obs.	Apr.	L	(m)
S_A^B	219,012	219,012	0,000	0,000
S_A^D	575,586	575,586	0,000	0,000
S_B^C	179,365	179,365	0,000	0,000
S_C^D	198,069	198,058	0,011	0,011
S_D^E	185,926	185,919	0,007	0,007
S_E^F	259,961	259,949	0,012	0,012
S_E^H	630,237	630,237	0,000	0,000
S_F^G	201,062	201,062	0,000	0,000
S_G^H	228,362	228,362	0,000	0,000

La desviación típica para cada observación y los valores L′ son

	L (μrad)	σ	L′
$\Sigma_A^{1,2,3}$	0	18	0,0
L_A^B	0	44	0,0
L_A^D	0	18	0,0
L_B^A	0	44	0,0
L_B^C	0	53	0,0
L_C^B	0	53	0,0
L_C^D	78	48	1,6
L_D^C	78	48	1,6
L_D^E	−161	51	−3,1
L_E^7	−7	31	−0,2

	L (μrad)	σ	L′
L_E^D	−197	51	−3,8
L_E^F	22	37	0,6
L_E^H	0	17	0,0
L_F^E	−102	37	−2,7
L_F^G	0	48	0,0
L_G^F	0	48	0,0
L_G^H	0	42	0,0
L_H^E	0	17	0,0
L_H^G	0	42	0,0
$\Sigma_H^{4,5,6}$	0	18	0,0



	L (m)	σ	L′
S_A^B	0,000	0,010	0,0
S_A^D	0,000	0,011	0,0
S_B^C	0,000	0,010	0,0
S_C^D	0,011	0,010	1,1
S_D^E	0,007	0,010	0,7
S_E^F	0,012	0,010	1,1
S_E^H	0,000	0,011	0,0
S_F^G	0,000	0,010	0,0
S_G^H	0,000	0,010	0,0

Las matrices A′ y N^{-1} se muestran al final del ejercicio. Los incrementos y valores ajustados son

	Δx	x (m)
X_B	−0,001	448,395
Y_B	0,001	1771,715
X_C	0,001	339,030
Y_C	0,003	1629,552
X_D	−0,015	317,142
Y_D	−0,005	1432,697
X_E	0,014	404,637
Y_E	0,002	1268,645
X_F	0,009	306,218
Y_F	−0,009	1028,035
X_G	−0,001	229,665
Y_G	−0,004	842,116

	Δx (rad)	Δx	x
Σ_A	$13\cdot10^{-6}$	0^g0007	248^g4902
Σ_B	$2\cdot10^{-6}$	0^g0000	65^g2292
Σ_C	$-3\cdot10^{-6}$	-0^g0002	263^g0623
Σ_D	$-1\cdot10^{-6}$	-0^g0001	385^g2312
Σ_E	$17\cdot10^{-6}$	0^g0008	207^g7158
Σ_F	$95\cdot10^{-6}$	0^g0055	73^g2941
Σ_G	$36\cdot10^{-6}$	0^g0021	356,4702
Σ_H	$12\cdot10^{-6}$	0^g0006	186^g3515

Los residuos V′ y V son:

	v'	v
$\Sigma_A^{1,2,3}$	−0,6	-0^g0007
L_A^B	0,2	0^g0005

	v'	v
L_A^D	−0,7	-0^g0008
L_B^A	0,0	-0^g0001

	v'	v
L_B^C	0,1	0^g0002
L_C^B	0,0	0^g0000
L_C^D	0,0	0^g0000
L_D^C	0,1	0^g0004
L_D^E	$-0{,}1$	-0^g0004
L_E^7	0,0	0^g0000
L_E^D	$-0{,}6$	-0^g0020
L_E^F	0,8	0^g0020

	v'	v
L_E^H	$-0{,}2$	-0^g0002
L_F^E	$-0{,}5$	-0^g0013
L_F^G	0,7	0^g0021
L_G^F	$-0{,}4$	-0^g0013
L_G^H	0,4	0^g0010
L_H^E	$-0{,}4$	-0^g0004
L_H^G	$-0{,}2$	-0^g0005
$\Sigma_H^{4,5,6}$	$-0{,}5$	-0^g0006

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
S_A^B	0,1	0,001	S_A^D	$-0{,}8$	$-0{,}009$	S_B^C	0,2	0,002
S_C^D	0,1	0,001	S_D^E	$-0{,}1$	$-0{,}001$	S_E^F	$-0{,}0$	$-0{,}000$
S_E^H	$-0{,}9$	$-0{,}010$	S_F^G	0,0	0,000	S_G^H	0,2	0,002

Las columnas de la desorientación de la matriz A, que no se muestran, tienen un -1 en la columna correspondiente a la desorientación de la estación desde la que se visa, salvo en las medidas de desorientación, $\Sigma_A^{1,2,3}$ y $\Sigma_H^{4,5,6}$, en las que es 1. Estas observaciones tienen una desviación típica $\sigma = 0^g0020/\sqrt{3}$. □

La matriz A' es

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
\Sigma_{A}^{1,2,3} \\
L_{A}^{B} \\
L_{A}^{D} \\
L_{B}^{A} \\
L_{B}^{C} \\
L_{C}^{B} \\
L_{C}^{D} \\
L_{D}^{C} \\
L_{D}^{E} \\
L_{E}^{7} \\
L_{E}^{D} \\
\\
S_{A}^{B} \\
S_{A}^{D} \\
S_{B}^{C} \\
S_{C}^{D} \\
S_{D}^{E} \\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
x_B & y_B & x_C & y_C & x_D & y_D \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
-104 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -93 & 24 & \cdots \\
-104 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
83 & -64 & -83 & 64 & \cdot & \cdot & \cdots \\
83 & -64 & -83 & 64 & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & 104 & -12 & -104 & 12 & \cdots \\
\cdot & \cdot & 104 & -12 & -104 & 12 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 93 & 49 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 93 & 49 & \cdots \\
 & \cdots & & & & & \\
-5 & -98 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -22 & -88 & \cdots \\
60 & 78 & -60 & -78 & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & 11 & 98 & -11 & -98 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -47 & 87 & \cdots \\
 & \cdots & & & & &
\end{array}\right.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & x_{\mathrm{E}} & y_{\mathrm{E}} & x_{\mathrm{F}} & y_{\mathrm{F}} & x_{\mathrm{G}} & y_{\mathrm{G}} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{ccccccc}
\cdots & & \cdots & & & & \\
\cdots & -93 & -49 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots & 9 & 54 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots & -93 & -49 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots & 96 & -39 & -96 & 39 & \cdot & \cdot \\
\cdots & 73 & -59 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots & 96 & -39 & -96 & 39 & \cdot & \cdot \\
\cdots & \cdot & \cdot & 97 & -40 & -97 & 40 \\
\cdots & \cdot & \cdot & 97 & -40 & -97 & 40 \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 30 & -100 \\
\cdots & 73 & -59 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 30 & -100 \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdots & & & & \\
\cdots & 47 & -87 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots & 37 & 91 & -37 & -91 & \cdot & \cdot \\
\cdots & 56 & 70 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots & \cdot & \cdot & 38 & 91 & -38 & -91 \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 94 & 28
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
 \\
\mathrm{L}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{E}} \\
\mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{7} \\
\mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}} \\
\mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{F}} \\
\mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{H}} \\
\mathrm{L}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{E}} \\
\mathrm{L}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{G}} \\
\mathrm{L}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{F}} \\
\mathrm{L}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{H}} \\
\mathrm{L}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{E}} \\
\mathrm{L}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}} \\
\Sigma_{\mathrm{H}}^{4,5,6} \\
 \\
\mathrm{S}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{E}} \\
\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{F}} \\
\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{H}} \\
\mathrm{S}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{G}} \\
\mathrm{S}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{H}}
\end{array}
$$

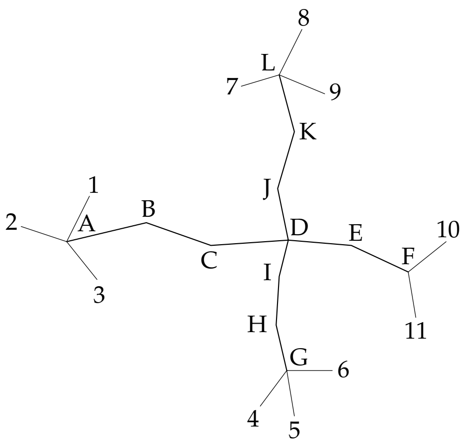
La matriz N^{-1} es

$$
\left(\begin{matrix}
63 & 3 & 62 & -7 & 37 & -5 & 18 & -5 & 10 & -4 & 4 & -3 & \cdots \\
 & 74 & -2 & 47 & 0 & 19 & 2 & 8 & 1 & 6 & 1 & 3 & \cdots \\
 & & 113 & -2 & 71 & -5 & 37 & -7 & 20 & -5 & 7 & -6 & \cdots \\
 & & & 94 & -13 & 40 & -6 & 17 & -3 & 12 & 0 & 6 & \cdots \\
 & & & & 93 & -13 & 61 & -6 & 35 & -6 & 13 & -8 & \cdots \\
 & & & & & 59 & -5 & 25 & -3 & 17 & 0 & 9 & \cdots \\
 & & & & & & 81 & -8 & 48 & -9 & 19 & -11 & \cdots \\
 & & & & & & & 52 & -3 & 35 & 3 & 18 & \cdots \\
 & & & & & & & & 78 & 4 & 46 & -6 & \cdots \\
 & & & & & & & & & 88 & 7 & 41 & \cdots \\
 & & & & & & & & & & 72 & 11 & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & 58 & \cdots
\end{matrix}\right.
$$

$$
\begin{matrix}
\cdots & -0{,}05 & -0{,}18 & 0{,}06 & 0{,}11 & \cdots \\
\cdots & 0{,}00 & -0{,}03 & -0{,}05 & -0{,}01 & \cdots \\
\cdots & -0{,}08 & -0{,}26 & 0{,}01 & 0{,}19 & \cdots \\
\cdots & 0{,}02 & 0{,}08 & 0{,}07 & 0{,}02 & \cdots \\
\cdots & -0{,}09 & -0{,}18 & -0{,}15 & 0{,}00 & \cdots \\
\cdots & 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}06 & 0{,}05 & \cdots \\
\cdots & -0{,}05 & -0{,}09 & -0{,}12 & -0{,}10 & \cdots \\
\cdots & 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}02 & -0{,}03 & \cdots \\
\cdots & -0{,}03 & -0{,}05 & -0{,}07 & -0{,}07 & \cdots \\
\cdots & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}02 & -0{,}01 & \cdots \\
\cdots & -0{,}01 & -0{,}02 & -0{,}03 & -0{,}03 & \cdots \\
\cdots & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}00 & \cdots \\
\cdots & 24\cdot 10^{-5} & 21\cdot 10^{-5} & 10\cdot 10^{-5} & -3\cdot 10^{-5} & \cdots \\
\cdots & & 192\cdot 10^{-5} & 9\cdot 10^{-5} & -39\cdot 10^{-5} & \cdots \\
\cdots & & & 198\cdot 10^{-5} & 39\cdot 10^{-5} & \cdots \\
\cdots & & & & 207\cdot 10^{-5} & \cdots
\end{matrix}
$$

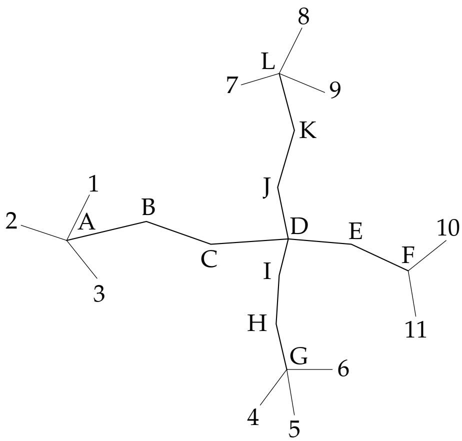
$$\left.\begin{array}{ccccc}
\cdots & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}02 & 0{,}02 \\
\cdots & 0{,}00 & 0{,}00 & -0{,}01 & 0{,}00 \\
\cdots & 0{,}05 & 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}03 \\
\cdots & -0{,}01 & -0{,}02 & -0{,}03 & -0{,}01 \\
\cdots & 0{,}07 & 0{,}09 & 0{,}07 & 0{,}04 \\
\cdots & -0{,}01 & -0{,}02 & -0{,}03 & -0{,}02 \\
\cdots & 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}10 & 0{,}06 \\
\cdots & -0{,}03 & -0{,}05 & -0{,}07 & -0{,}04 \\
\cdots & 0{,}02 & -0{,}01 & 0{,}10 & 0{,}04 \\
\cdots & -0{,}02 & -0{,}02 & -0{,}14 & -0{,}04 \\
\cdots & 0{,}00 & -0{,}10 & -0{,}02 & 0{,}01 \\
\cdots & -0{,}01 & -0{,}01 & -0{,}15 & -0{,}03 \\
\cdots & -7\cdot 10^{-5} & -9\cdot 10^{-5} & -7\cdot 10^{-5} & -4\cdot 10^{-5} \\
\cdots & -13\cdot 10^{-5} & -16\cdot 10^{-5} & -13\cdot 10^{-5} & -8\cdot 10^{-5} \\
\cdots & -13\cdot 10^{-5} & -18\cdot 10^{-5} & -14\cdot 10^{-5} & -9\cdot 10^{-5} \\
\cdots & -4\cdot 10^{-5} & -12\cdot 10^{-5} & -9\cdot 10^{-5} & -5\cdot 10^{-5} \\
\cdots & 28\cdot 10^{-5} & 18\cdot 10^{-5} & 8\cdot 10^{-5} & 7\cdot 10^{-5} \\
\cdots & & 133\cdot 10^{-5} & 13\cdot 10^{-5} & 9\cdot 10^{-5} \\
\cdots & & & 157\cdot 10^{-5} & 14\cdot 10^{-5} \\
\cdots & & & & 21\cdot 10^{-5}
\end{array}\right) \times 10^{-6}$$

3. Poligonales concurrentes



En esta ocasión se tienen dos poligonales que se cortan en un punto común a ambas. Los valores conocidos son:

$$\begin{aligned}
X_A &= 1086{,}150, \\
Y_A &= 270{,}755, \\
\theta_A^1 &= 28^g0775, \\
\theta_A^2 &= 319^g0517, \\
\theta_A^3 &= 155^g3659,
\end{aligned}$$



$$X_F = 1639{,}970,$$
$$Y_F = 283{,}065,$$
$$\theta_F^{10} = 55^g 7196,$$
$$\theta_F^{11} = 178^g 5217,$$
$$X_G = 1443{,}055,$$
$$Y_G = 123{,}070,$$
$$\theta_G^{4} = 237^g 8482,$$
$$\theta_G^{5} = 187^g 6188,$$
$$\theta_G^{6} = 100^g 0357,$$
$$X_L = 1430{,}750,$$
$$Y_L = 603{,}050,$$

$$\theta_L^7 = 278^g 949, \qquad \theta_L^8 = 28^g 2687, \qquad \theta_L^9 = 124^g 6611.$$

Los valores observados,

$$L_A^1 = 247^g 2701, \qquad L_A^2 = 138^g 2435, \qquad L_A^3 = 374^g 5568,$$
$$L_A^B = 279^g 7053, \qquad L_B^A = 93^g 3974, \qquad L_B^C = 354^g 4801,$$
$$L_C^B = 180^g 8528, \qquad L_C^D = 354^g 8951, \qquad L_D^C = 350^g 5978,$$
$$L_D^J = 42^g 0320, \qquad L_D^E = 160^g 3146, \qquad L_D^I = 270^g 5529,$$
$$L_E^D = 335^g 9710, \qquad L_E^F = 158^g 4103, \qquad L_F^E = 75^g 3540,$$
$$L_F^{10} = 203^g 2785, \qquad L_F^{11} = 326^g 0795, \qquad L_G^4 = 130^g 1142,$$
$$L_G^5 = 79^g 8861, \qquad L_G^6 = 392^g 3025, \qquad L_G^H = 277^g 6726,$$
$$L_H^G = 36^g 3763, \qquad L_H^I = 254^g 9432, \qquad L_I^H = 91^g 7180,$$
$$L_I^D = 303^g 3376, \qquad L_J^D = 24^g 4375, \qquad L_J^K = 255^g 5252,$$
$$L_K^J = 54^g 7985, \qquad L_K^L = 220^g 0485, \qquad L_L^K = 93^g 5528,$$
$$L_L^7 = 189^g 0905, \qquad L_L^8 = 338^g 4119, \qquad L_L^9 = 34^g 8016;$$

$$S_A^B = 158{,}806, \quad S_B^C = 110{,}936, \quad S_C^D = 125{,}838, \quad S_D^E = 102{,}512,$$
$$S_E^F = 101{,}853, \quad S_G^H = 75{,}825, \quad S_H^I = 78{,}921, \quad S_I^D = 60{,}896,$$
$$S_D^J = 85{,}423, \quad S_J^K = 96{,}190, \quad S_K^L = 95{,}529.$$

Las precisiones para observaciones angulares y de distancia son respectivamente

$$\sigma_L^2 = 0^g0007^{\,2} + (0^g2/S)^2,$$
$$\sigma_S^2 = 0{,}006^2 + (12 \cdot 10^{-6}S)^2 \quad (\text{m}).$$

Para las observaciones de azimut conocido tomar 0^g0015. Ajustar la figura.

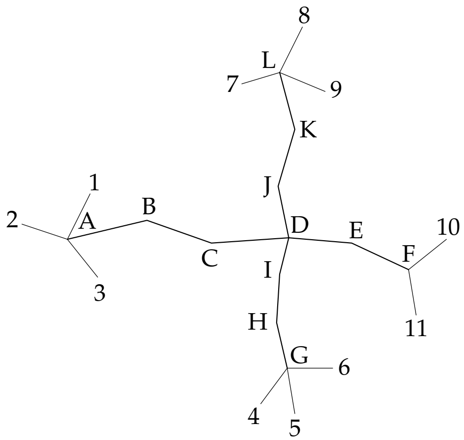
➡ Comenzamos promediando para cada estación las desorientaciones calculadas a partir de lecturas a direcciones de azimut conocido. Se obtienen las siguientes observaciones promedio:

$$\Sigma_A^{1,2,3} = 180^g8082, \qquad \Sigma_F^{10,11} = 252^g4417,$$
$$\Sigma_G^{4,5,6} = 107^g7333, \qquad \Sigma_L^{7,8,9} = 89^g8583.$$

Estas observaciones, que reemplazan a las originales, tienen desviación típica $\sigma = 0^g0015/\sqrt{3} = 0^g0009$, salvo $\Sigma_F^{10,11}$, para la que es $0^g0015/\sqrt{2} = 0^g0011$.

A continuación obtenemos unos valores aproximados, calculando cada punto por el camino más corto: A – B – C; F – E – D; G – H – I, y L – K – J. Se llega a los siguientes valores:

$$\begin{array}{lll}
\Sigma_A = 180^g8082, & & \\
\Sigma_B = 167^g1161, & X_B = 1215{,}376, & Y_B = 363{,}059, \\
\Sigma_C = 140^g7434, & X_C = 1319{,}989, & Y_C = 326{,}144, \\
\Sigma_D = 345^g0418, & X_D = 1445{,}523, & Y_D = 334{,}751, \\
\Sigma_E = 369^g3854, & X_E = 1547{,}672, & Y_E = 326{,}136, \\
\Sigma_F = 252^g4417, & & \\
\Sigma_G = 107^g7333, & & \\
\Sigma_H = 149^g0296, & X_H = 1425{,}824, & Y_H = 196{,}911, \\
\Sigma_I = 112^g2548, & X_I = 1430{,}746, & Y_I = 275{,}679, \\
\Sigma_J = 162^g6359, & X_J = 1428{,}292, & Y_J = 418{,}443, \\
\Sigma_K = 163^g3626, & X_K = 1455{,}362, & Y_K = 510{,}746, \\
\Sigma_L = 89^g8583. & &
\end{array}$$



En base a estos valores aproximados, los valores aproximados de las observaciones y los términos L son

	Obs.	Apr.	L	L (rad)
$\Sigma_A^{1,2,3}$	180^g8082	180^g8082	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_A^B	279^g7053	279^g7053	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_B^A	93^g3974	93^g3974	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_B^C	354^g4801	354^g4801	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_C^B	180^g8528	180^g8528	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_C^D	354^g8951	354^g8986	-0^g0035	$-55 \cdot 10^{-6}$
L_D^C	350^g5978	350^g6003	-0^g0025	$-39 \cdot 10^{-6}$
L_D^J	42^g0320	42^g0324	-0^g0004	$-6 \cdot 10^{-6}$
L_D^E	160^g3146	160^g3146	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_D^I	270^g5529	270^g5624	-0^g0095	$-150 \cdot 10^{-6}$
L_E^D	335^g9710	335^g9710	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_E^F	158^g4103	158^g4103	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_F^E	75^g3540	75^g3540	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
$\Sigma_F^{10,11}$	252^g4417	252^g4417	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
$\Sigma_G^{4,5,6}$	107^g7333	107^g7333	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$

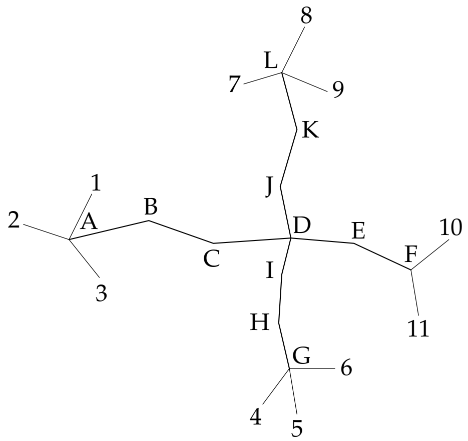
	Obs.	Apr.	L	L (rad)
L_G^H	$277^g 6726$	$277^g 6726$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_H^G	$36^g 3763$	$36^g 3763$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_H^I	$254^g 9432$	$254^g 9432$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_I^H	$91^g 7180$	$91^g 7180$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_I^D	$303^g 3376$	$303^g 3494$	$-0^g 0118$	$-185 \cdot 10^{-6}$
L_J^D	$24^g 4375$	$24^g 4383$	$-0^g 0008$	$-12 \cdot 10^{-6}$
L_J^K	$255^g 5252$	$255^g 5252$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_K^J	$54^g 7985$	$54^g 7985$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_K^L	$220^g 0485$	$220^g 0485$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_L^K	$93^g 5528$	$93^g 5528$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
$\Sigma_L^{7,8,9}$	$89^g 8583$	$89^g 8583$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$

	Obs.	Apr.	L (m)
S_A^B	158,806	158,806	0,000
S_B^C	110,936	110,936	0,000
S_C^D	125,838	125,828	0,010
S_D^E	102,512	102,512	0,000
S_E^F	101,853	101,853	0,000
S_G^H	75,825	75,825	0,000
S_H^I	78,921	78,921	0,000
S_I^D	60,896	60,892	0,004
S_D^J	85,423	85,448	−0,025
S_J^K	96,190	96,190	0,000
S_K^L	95,529	95,529	0,000

De acuerdo al enunciado, los valores de σ para cada observación y con ello los valores L$'$ son

	L (μrad)	σ	L$'$
$\Sigma_A^{1,2,3}$	0	14	0,0
L_A^B	0	23	0,0

	L (μrad)	σ	L$'$
L_B^A	0	23	0,0
L_B^C	0	30	0,0



	L (μrad)	σ	L′
L_C^B	0	30	0,0
L_C^D	−55	27	−2,0
L_D^C	−39	27	−1,4
L_D^J	−6	38	−0,2
L_D^E	0	33	0,0
L_D^I	−150	53	−2,8
L_E^D	0	33	0,0
L_E^F	0	33	0,0
L_F^E	0	33	0,0
$\Sigma_F^{10,11}$	0	17	0,0
$\Sigma_G^{4,5,6}$	0	14	0,0

	L (μrad)	σ	L′
L_G^H	0	43	0,0
L_H^G	0	43	0,0
L_H^I	0	41	0,0
L_I^H	0	41	0,0
L_I^D	−185	53	−3,5
L_J^D	−12	38	−0,3
L_J^K	0	34	0,0
L_K^J	0	34	0,0
L_K^L	0	35	0,0
L_L^K	0	35	0,0
$\Sigma_L^{7,8,9}$	0	14	0,0

	L (m)	σ	L′
S_A^B	0,000	0,006	0,0
S_B^C	0,000	0,006	0,0
S_C^D	0,010	0,006	1,6
S_D^E	0,000	0,006	0,0
S_E^F	0,000	0,006	0,0

	L (m)	σ	L′
S_G^H	0,000	0,006	0,0
S_H^I	0,000	0,006	0,0
S_I^D	0,004	0,006	0,6
S_D^J	−0,025	0,006	−4,1

	L (m)	σ	L′
S_J^K	0,000	0,006	0,0

	L (m)	σ	L′
S_K^L	0,000	0,006	0,0

Para las observaciones de distancia el valor de σ es prácticamente constante, debido a que la componente proporcional a la distancia no llega a tener importancia en relación a la componente constate para las distancias de observación.

El plantemiento de las ecuaciones de residuo no entraña ninguna dificultad. La matriz A tiene dimensión 28×37. A modo de muestra escribimos a continuación algunas de sus ecuaciones:

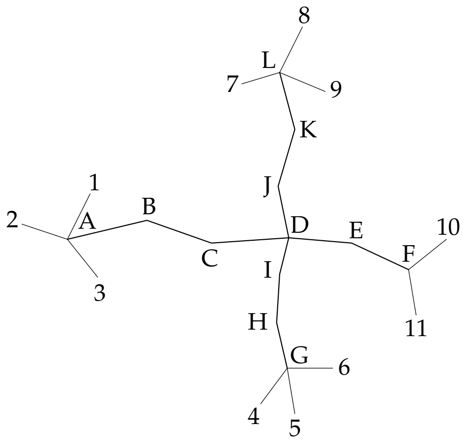
$$
\begin{aligned}
v_{\Sigma_A^{1,2,3}} &= 0 - \Delta\mathit{\Sigma}_A,\\
v_{L_A^B} &\approx 0 - (0{,}0037\Delta X_B - 0{,}0051\,\Delta Y_B - \Delta\mathit{\Sigma}_A),\\
v_{S_A^B} &\approx 0 - (0{,}81\,\Delta X_B + 0{,}58\,\Delta Y_B),\\
v_{L_D^E} &\approx 0 - (0{,}0008\,\Delta X_D + 0{,}0097\Delta Y_D\\
&\qquad - 0{,}0008\,\Delta X_E - 0{,}0097\Delta Y_E - \Delta\mathit{\Sigma}_D),\\
v_{L_D^J} &\approx -6\cdot 10^{-6} - (-0{,}0114\,\Delta X_D - 0{,}0024\,\Delta Y_D\\
&\qquad + 0{,}0114\,\Delta X_J + 0{,}0024\,\Delta Y_J),\\
v_{S_D^J} &\approx -0{,}025 - (0{,}20\,\Delta X_D - 0{,}98\,\Delta Y_D - 0{,}20\,\Delta X_J + 0{,}98\,\Delta Y_J);
\end{aligned}
$$

y algunas de ellas ponderadas, divididas por su correspondiente σ:

$$
\begin{aligned}
v'_{\Sigma_A^{1,2,3}} &= 0 - 73511\Delta\mathit{\Sigma}_A,\\
v'_{L_A^B} &\approx 0 - (162\Delta X_B - 226\,\Delta Y_B - \Delta\mathit{\Sigma}_A),\\
v'_{S_D^J} &\approx -4{,}1 - (33\,\Delta X_D - 161\,\Delta Y_D - 33\,\Delta X_J + 161\,\Delta Y_J).
\end{aligned}
$$

La matriz N^{-1} es también muy grande. Se muestran a continuación los elementos de la diagonal principal:

x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}
X_B	$24\cdot 10^{-6}$	Y_B	$14\cdot 10^{-6}$	X_C	$31\cdot 10^{-6}$	Y_C	$19\cdot 10^{-6}$
X_D	$15\cdot 10^{-6}$	Y_D	$21\cdot 10^{-6}$	X_E	$9\cdot 10^{-6}$	Y_E	$7\cdot 10^{-6}$
X_H	$7\cdot 10^{-6}$	Y_H	$25\cdot 10^{-6}$	X_I	$16\cdot 10^{-6}$	Y_I	$30\cdot 10^{-6}$
X_J	$17\cdot 10^{-6}$	Y_J	$31\cdot 10^{-6}$	X_K	$8\cdot 10^{-6}$	Y_K	$25\cdot 10^{-6}$



x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}
Σ_A	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	Σ_B	$6{,}2 \cdot 10^{-10}$	Σ_C	$7{,}3 \cdot 10^{-10}$
Σ_D	$5{,}4 \cdot 10^{-10}$	Σ_E	$8{,}9 \cdot 10^{-10}$	Σ_F	$2{,}5 \cdot 10^{-10}$
Σ_G	$1{,}8 \cdot 10^{-10}$	Σ_H	$15{,}8 \cdot 10^{-10}$	Σ_I	$18{,}8 \cdot 10^{-10}$
Σ_J	$11{,}7 \cdot 10^{-10}$	Σ_K	$10{,}9 \cdot 10^{-10}$	Σ_L	$1{,}7 \cdot 10^{-10}$

Estos elementos servirán para obtener los valores de σ para las diversas estimaciones, tomando la raíz cuadrada. Por lo tanto para hacerse una idea de su magnitud hay que efectuar mentalmente una raíz cuadrada aproximada. Por ello resulta más ilustrativo expresarlos como un número entre uno y cien multiplicado por una potencia par de diez.

Los incrementos y los valores ajustados son

	Δx	x (m)
X_B	$-0{,}003$	$1215{,}373$
Y_B	$-0{,}001$	$363{,}058$
X_C	$-0{,}007$	$1319{,}982$
Y_C	$0{,}000$	$326{,}144$
X_D	$-0{,}002$	$1445{,}521$
Y_D	$0{,}005$	$334{,}756$

	Δx (rad)	Δx	x
Σ_A	$-1 \cdot 10^{-6}$	-0^g0001	180^g8081
Σ_B	$-2 \cdot 10^{-6}$	-0^g0001	167^g1160
Σ_C	$11 \cdot 10^{-6}$	0^g0007	140^g7441
Σ_D	$8 \cdot 10^{-6}$	0^g0005	345^g0422
Σ_E	$22 \cdot 10^{-6}$	0^g0014	369^g3867
Σ_F	$4 \cdot 10^{-6}$	0^g0003	252^g4419

	Δx	x (m)
X_E	$-0{,}001$	1547,671
Y_E	0,003	326,139
X_H	0,002	1425,826
Y_H	0,000	196,911
X_I	0,005	1430,752
Y_I	$-0{,}001$	275,678
X_J	0,001	1428,294
Y_J	$-0{,}013$	418,431
X_K	0,002	1455,364
Y_K	$-0{,}007$	510,739

	Δx (rad)	Δx	x
Σ_G	$2 \cdot 10^{-6}$	0^g0001	107^g7334
Σ_H	$34 \cdot 10^{-6}$	0^g0022	149^g0318
Σ_I	$47 \cdot 10^{-6}$	0^g0030	112^g2578
Σ_J	$-4 \cdot 10^{-6}$	-0^g0003	162^g6356
Σ_K	$-7 \cdot 10^{-6}$	-0^g0005	163^g3621
Σ_L	$0 \cdot 10^{-6}$	0^g0000	89^g8582

Los residuos V′ y V son:

	v'	v
$\Sigma_A^{1,2,3}$	0,1	0^g0001
L_A^B	0,2	0^g0002
L_B^A	0,2	0^g0002
L_B^C	$-0{,}2$	-0^g0004
L_C^B	0,2	0^g0004
L_C^D	$-0{,}2$	-0^g0003
L_D^C	0,3	0^g0005
L_D^J	0,2	0^g0006
L_D^E	$-0{,}5$	-0^g0010
L_D^I	$-0{,}1$	-0^g0005
L_E^D	$-0{,}0$	-0^g0001
L_E^F	0,0	0^g0001
L_F^E	$-0{,}5$	-0^g0011

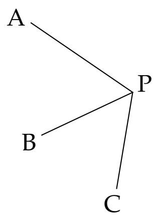
	v'	v
$\Sigma_F^{10,11}$	$-0{,}3$	-0^g0003
$\Sigma_G^{4,5,6}$	$-0{,}2$	-0^g0001
L_G^H	$-0{,}5$	-0^g0013
L_H^G	0,3	0^g0008
L_H^I	$-0{,}3$	-0^g0007
L_I^H	0,0	0^g0001
L_I^D	$-0{,}1$	-0^g0002
L_J^D	$-0{,}2$	-0^g0005
L_J^K	0,2	0^g0004
L_K^J	0,1	0^g0002
L_K^L	$-0{,}1$	-0^g0002
L_L^K	0,1	0^g0002
$\Sigma_L^{7,8,9}$	0,0	0^g0000

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
S_A^B	0,5	0,003	S_B^C	0,7	0,004	S_C^D	0,7	0,004
S_D^E	$-0{,}1$	0,000	S_E^F	$-0{,}4$	$-0{,}002$	S_G^H	0,1	0,001

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
S_H^I	0,0	0,000	S_I^D	−0,1	0,000	S_D^J	−1,1	−0,007
S_J^K	−1,0	−0,006	S_K^L	−1,1	−0,007	S_E^F	−0,4	−0,002
S_G^H	0,1	0,001						

□

4. Intersección directa



Desde los puntos A, B y C de coordenadas conocidas se han efectuado lecturas angulares al punto P. Se conocen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
X_A &= 10{,}000, & Y_A &= 529{,}043, & \Sigma_A &= 180^g8087,\\
X_B &= 43{,}487, & Y_B &= 177{,}433, & \Sigma_B &= 167^g1170,\\
X_C &= 277{,}893, & Y_C &= 10{,}000, & \Sigma_C &= 140^g7454.
\end{aligned}$$

Calcular unas coordenadas para el punto P.

➡ El enunciado no dice nada acerca de las precisones de las observaciones así que supondremos que son todas iguales. Se calcula por algún método coordenadas aproximadas para P. Tomaremos $(X_P)_0 = 328{,}100$, $(Y_P)_0 = 311{,}400$. Las ecuaciones de residuo quedan planteadas como sigue:

$$\begin{aligned}
v_{L_A^P} &\approx 19\cdot 10^{-6} - (-0{,}0015\,\Delta X_P - 0{,}0021\,\Delta Y_P),\\
v_{L_B^P} &\approx 99\cdot 10^{-6} - (0{,}0014\,\Delta X_P - 0{,}0029\,\Delta Y_P),\\
v_{L_C^P} &\approx 87\cdot 10^{-6} - (0{,}0032\,\Delta X_P - 0{,}0005\,\Delta Y_P).
\end{aligned}$$

Las matrices N y N^{-1} son

$$N = 10^{-6}\times\begin{pmatrix}14 & -2\\ -2 & 13\end{pmatrix}, \qquad N^{-1} = \begin{pmatrix}71796 & 13614\\ 13614 & 78643\end{pmatrix};$$

y los incrementos y valores ajustados:

$$\Delta X_P = 0{,}023, \quad \Delta Y_P = -0{,}024, \qquad X_P = 328{,}123, \quad Y_P = 311{,}376.$$

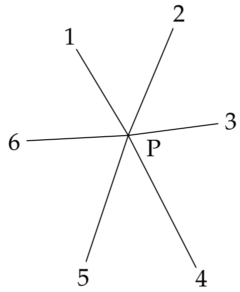
Por último los residuos:

$$L - AX_\Delta = N = 10^{-6}\,(1 \quad -1 \quad 1)^{\mathsf{T}} \quad \text{(rad)},$$

y los residuos en grados son menores de 10^{-4}. □

El hecho de obtener unos residuos tan pequeños se debe a que sólo hay una redundancia. Los errores reales pueden ser bastante mayores. De hecho, puesto que este ejercicio es una simulación, el autor sí que conoce los valores reales de los parámetros, las magnitudes observadas y los errores de lectura. Los errores reales eran 0^g0007, 0^g0006 y 0^g0001, generados aleatoriamente siguiendo una distribución normal $(0, 0{,}0008)$. Así pues, un valor de σ_L de 0^g0008 ha dado lugar a residuos menores de un segundo. Cuando el número de redundancias es muy pequeño el valor de los residuos, si son pequeños, no es significativo.

5. Intersección inversa



Con estación en el punto de coordenadas desconocidas P se observaron lecturas horizontales a seis puntos conocidos. Las coordenadas de estos son

$$\begin{aligned}
X_1 &= 44\,829{,}90, & Y_1 &= 14\,210{,}35,\\
X_2 &= 46\,646{,}98, & Y_2 &= 14\,599{,}53,\\
X_3 &= 47\,481{,}57, & Y_3 &= 12\,821{,}79,\\
X_4 &= 47\,069{,}46, & Y_4 &= 10\,132{,}26,\\
X_5 &= 45\,012{,}71, & Y_5 &= 10\,250{,}27,\\
X_6 &= 43\,898{,}78, & Y_6 &= 12\,500{,}32.
\end{aligned}$$

Las observaciones desde P,

$$\begin{aligned}
L^1 &= 364^g8496, & L^2 &= 24^g8367, & L^3 &= 90^g9593,\\
L^4 &= 169^g1124, & L^5 &= 219^g9664, & L^6 &= 296^g0718.
\end{aligned}$$

Hallar coordenadas y desorientación en el punto P.

➡ Hay como siempre diversas maneras de obtener valores aproximados. Los siguientes son unos posibles:

$$(X_P)_0 = 45800{,}60, \qquad (Y_P)_0 = 12598{,}70, \qquad (\Sigma_P)_0 = 0{,}0100\ \text{rad}.$$

Los valores calculados y el vector L, ya en radianes, son

	Obs	Apr.	L (rad)
L^1	5,731044	5,731075	$-31\cdot 10^{-6}$
L^2	0,390134	0,390188	$-54\cdot 10^{-6}$
L^3	1,428785	1,428852	$-67\cdot 10^{-6}$
L^4	2,656411	2,656452	$-41\cdot 10^{-6}$
L^5	3,455224	3,455289	$-65\cdot 10^{-6}$
L^6	4,650685	4,650706	$-21\cdot 10^{-6}$

A continuación se muestran las matrices A y N^{-1}.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \mathrm{X_P} & \mathrm{Y_P} & \Sigma_\mathrm{P} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\mathrm{A} = & \begin{pmatrix}
27\cdot 10^{-5} & 46\cdot 10^{-5} & -1 \\
-18\cdot 10^{-5} & 42\cdot 10^{-5} & -1 \\
-58\cdot 10^{-5} & 8\cdot 10^{-5} & -1 \\
16\cdot 10^{-5} & -32\cdot 10^{-5} & -1 \\
13\cdot 10^{-5} & -38\cdot 10^{-5} & -1 \\
52\cdot 10^{-5} & -3\cdot 10^{-5} & -1
\end{pmatrix},
\end{array}
$$

$$
\mathrm{N}^{-1} = \begin{pmatrix}
1302000 & 14000 & 0 \\
14000 & 1576000 & 59 \\
0 & 59 & 0{,}169
\end{pmatrix}.
$$

Los incrementos son

$$\Delta X_\mathrm{P} = 0{,}04, \qquad \Delta Y_\mathrm{P} = 0{,}01, \qquad \Delta \Sigma_\mathrm{P} = 47\cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad},$$

y de ellos los valores ajustados:

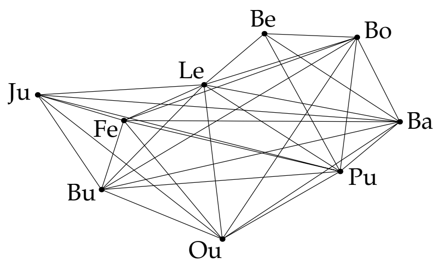
$$X_\mathrm{P} = 45800{,}64, \qquad Y_\mathrm{P} = 12598{,}71, \qquad \Sigma_\mathrm{P} = 0{,}010047 = 0^g6396.$$

Finalmente los residuos:

	v (μrad)	v		v (μrad)	v		v (μrad)	v
L^1	1	0^g0001	L^2	-5	-0^g0003	L^3	0	-0^g0000
L^4	16	0^g0010	L^5	-18	-0^g0012	L^6	7	0^g0005

□

6. Red angular



Se observó la red mostrada en la figura, obteniendo los siguientes valores:

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Pu}} = 290^g 5985, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Bo}} = 4^g 8529, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Ou}} = 297^g 6300, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Le}} = 346^g 6339, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Be}} = 371^g 4149,$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Bu}} = 320^g 5577, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Fe}} = 335^g 0497, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Ju}} = 339^g 4744,$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ba}} = 319^g 8516, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Bo}} = 271^g 9678, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ou}} = 130^g 8857,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Le}} = 200^g 0493, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Be}} = 231^g 9184, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Bu}} = 159^g 1929,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Fe}} = 178^g 6977, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ju}} = 179^g 7671,$$

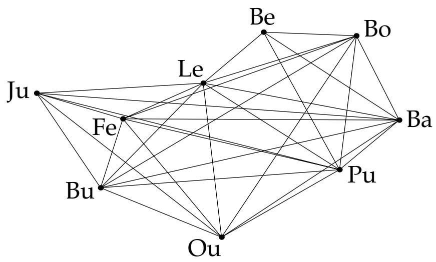
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Ba}} = 137^g 8237, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Pu}} = 175^g 6818, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Ou}} = 205^g 2389,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Le}} = 248^g 6046, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Be}} = 270^g 2067, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Bu}} = 233^g 5580,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Fe}} = 245^g 9370,$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Ba}} = 173^g 5862, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Pu}} = 177^g 5939, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Bo}} = 148^g 2328,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Le}} = 103^g 1747, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Bu}} = 35^g 4255, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Fe}} = 66^g 5059,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Ju}} = 52^g 8650,$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Ba}} = 173^g 9712, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Pu}} = 198^g 1309, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Bo}} = 142^g 9817,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Ou}} = 254^g 5547, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Be}} = 117^g 4054, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Bu}} = 311^g 4465,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Fe}} = 335^g 4447, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Ju}} = 358^g 2420,$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Be}}^{\mathrm{Ba}} = 290^g 2099, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Be}}^{\mathrm{Pu}} = 321^g 4591, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Be}}^{\mathrm{Bo}} = 256^g 0422,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Be}}^{\mathrm{Le}} = 8^g 8733,$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Ba}} = 45^g 5396, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Pu}} = 54^g 9216, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Bo}} = 25^g 5763,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Ou}} = 84^g 4479, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Le}} = 9^g 0935, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Fe}} = 379^g 6551,$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Ju}} = 321^g 9229,$$



$$L_{Fe}^{Ba} = 227^g 2651,$$
$$L_{Fe}^{Pu} = 241^g 6589,$$
$$L_{Fe}^{Bo} = 205^g 1911,$$
$$L_{Fe}^{Ou} = 282^g 7664,$$
$$L_{Fe}^{Le} = 200^g 3188,$$
$$L_{Fe}^{Bu} = 346^g 8814,$$
$$L_{Fe}^{Ju} = 45^g 3766,$$

$$L_{Ju}^{Ba} = 235^g 5486, \qquad L_{Ju}^{Bo} = 219^g 5035, \qquad L_{Ju}^{Ou} = 272^g 9820,$$
$$L_{Ju}^{Le} = 226^g 9821, \qquad L_{Ju}^{Bu} = 293^g 0197, \qquad L_{Ju}^{Fe} = 249^g 2360.$$

Entre los vértices Ba y Ou hay una distancia aproximada de 800 m. La precisión de las lecturas en función de la distancia es:

$$\Sigma_L^2 = 0^g 0005^2 + (0^g 9/S)^2.$$

Obtener una solución mínimo cuadrática.

➡ Se trata de una red en la que sólo existen observaciones angulares y no hay ninguna coordenada conocida que sitúe la figura en posición. Entonces la fijación de la figura en posición, orientación y tamaño es arbitraria, y lo podemos hacer tomando a discreción las coordenadas de dos puntos. No obstante, la precisión de las observaciones es una expresión en función de la distancia, lo que hace necesario conocer las distancias, al menos de manera aproximada. Para ello el enunciado proporciona el dato $S_{Ba}^{Ou} \approx 800$ m. En base a esto podemos tomar las siguientes coordenadas como fijas, que, de acuerdo al croquis, no dan lugar a valores negativos y proporcionan conjuntos de valores X e Y bien diferenciados:

$$X_{Ou} = 400, \quad Y_{Ou} = 2050, \qquad X_{Ba} = 1200, \quad Y_{Ba} = 2050.$$

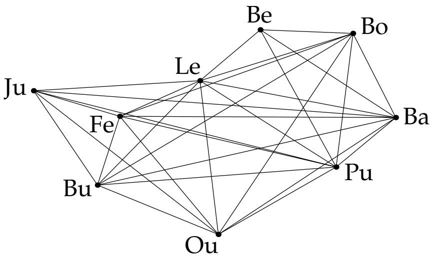
Las coordenadas de los demás puntos se pueden calcular por intersección directa desde estos dos, a excepción de Be, para el cual no existe visual desde Ou, y Pu, para el que la geometría no lo permite. Para estos puntos se pueden obtener coordenadas en un segundo paso por intersección directa a partir de Ba y Le, por ejemplo.

Procediendo como se ha descrito, y calculando las desorientaciones de todos los puntos a partir de sus lecturas a Ba, y en este último a partir de su lectura a Ou, los valores que se obtienen son:

$$
\begin{array}{lll}
\Sigma_{\mathrm{Ba}} = 2^{g}3700, & & \\
\Sigma_{\mathrm{Pu}} = 173^{g}1169, & X_{\mathrm{Pu}} = 910{,}03, & Y_{\mathrm{Pu}} = 2017{,}84, \\
\Sigma_{\mathrm{Bo}} = 69^{g}3992, & X_{\mathrm{Bo}} = 1240{,}28, & Y_{\mathrm{Bo}} = 2403{,}53, \\
\Sigma_{\mathrm{Ou}} = 326^{g}4138, & & \\
\Sigma_{\mathrm{Le}} = 375^{g}0327, & X_{\mathrm{Le}} = 661{,}63, & Y_{\mathrm{Le}} = 2571{,}78, \\
\Sigma_{\mathrm{Be}} = 283^{g}575, & X_{\mathrm{Be}} = 956{,}73, & Y_{\mathrm{Be}} = 2607{,}00, \\
\Sigma_{\mathrm{Bu}} = 77^{g}3881, & X_{\mathrm{Bu}} = 122{,}84, & Y_{\mathrm{Bu}} = 2455{,}63, \\
\Sigma_{\mathrm{Fe}} = 310^{g}1546, & X_{\mathrm{Fe}} = 335{,}68, & Y_{\mathrm{Fe}} = 2625{,}94, \\
\Sigma_{\mathrm{Ju}} = 306^{g}2958, & X_{\mathrm{Ju}} = 118{,}24, & Y_{\mathrm{Ju}} = 2884{,}87.
\end{array}
$$

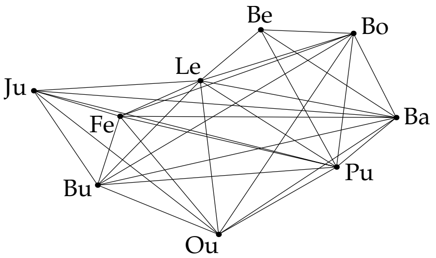
Los valores aproximados de las magnitudes observadas y los términos L,

	Obs.	Apr.	L	L (rad)
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Pu}}$	$290^{g}5985$	$290^{g}5985$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Bo}}$	$4^{g}8529$	$4^{g}8529$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Ou}}$	$297^{g}6300$	$297^{g}6300$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Le}}$	$346^{g}6339$	$346^{g}6339$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Be}}$	$371^{g}4149$	$371^{g}4149$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Bu}}$	$320^{g}5577$	$320^{g}5577$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Fe}}$	$335^{g}0497$	$335^{g}0497$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Ju}}$	$339^{g}4744$	$339^{g}4744$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ba}}$	$319^{g}8516$	$319^{g}8516$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Bo}}$	$271^{g}9678$	$271^{g}9633$	$0^{g}0045$	$70\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ou}}$	$130^{g}8857$	$130^{g}8918$	$-0^{g}0061$	$-96\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Le}}$	$200^{g}0493$	$200^{g}0467$	$0^{g}0026$	$41\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Be}}$	$231^{g}9184$	$231^{g}9184$	$0^{g}0000$	$0\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Bu}}$	$159^{g}1929$	$159^{g}1942$	$-0^{g}0013$	$-21\cdot10^{-6}$
$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Fe}}$	$178^{g}6977$	$178^{g}6998$	$-0^{g}0021$	$-33\cdot10^{-6}$



	Obs.	Apr.	L	L (rad)
L_{Pu}^{Ju}	179^g7671	179^g7687	-0^g0016	$-25\cdot10^{-6}$
L_{Bo}^{Ba}	137^g8237	137^g8237	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_{Bo}^{Pu}	175^g6818	175^g6810	0^g0008	$12\cdot10^{-6}$
L_{Bo}^{Ou}	205^g2389	205^g2474	-0^g0085	$-134\cdot10^{-6}$
L_{Bo}^{Le}	248^g6046	248^g6143	-0^g0097	$-153\cdot10^{-6}$
L_{Bo}^{Be}	270^g2067	270^g2245	-0^g0178	$-280\cdot10^{-6}$
L_{Bo}^{Bu}	233^g5580	233^g5665	-0^g0085	$-134\cdot10^{-6}$
L_{Bo}^{Fe}	245^g9370	245^g9486	-0^g0116	$-182\cdot10^{-6}$
L_{Ou}^{Ba}	173^g5862	173^g5862	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_{Ou}^{Pu}	177^g5939	177^g5949	-0^g0010	$-16\cdot10^{-6}$
L_{Ou}^{Bo}	148^g2328	148^g2328	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_{Ou}^{Le}	103^g1747	103^g1747	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_{Ou}^{Bu}	35^g4255	35^g4255	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_{Ou}^{Fe}	66^g5059	66^g5059	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_{Ou}^{Ju}	52^g8650	52^g8650	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_{Le}^{Ba}	173^g9712	173^g9712	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_{Le}^{Pu}	198^g1309	198^g1309	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_{Le}^{Bo}	142^g9817	142^g9808	0^g0009	$14\cdot10^{-6}$
L_{Le}^{Ou}	254^g5547	254^g5558	-0^g0011	$-17\cdot10^{-6}$
L_{Le}^{Be}	117^g4054	117^g4054	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_{Le}^{Bu}	311^g4465	311^g4498	-0^g0033	$-52\cdot10^{-6}$

	Obs.	Apr.	L	L (rad)
L_{Le}^{Fe}	335^g4447	335^g4500	-0^g0053	$-83 \cdot 10^{-6}$
L_{Le}^{Ju}	358^g2420	358^g2448	-0^g0028	$-44 \cdot 10^{-6}$
L_{Be}^{Ba}	290^g2099	290^g2099	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_{Be}^{Pu}	321^g4591	321^g4603	-0^g0012	$-18 \cdot 10^{-6}$
L_{Be}^{Bo}	256^g0422	256^g0487	-0^g0065	$-102 \cdot 10^{-6}$
L_{Be}^{Le}	8^g8733	8^g8631	0^g0102	$160 \cdot 10^{-6}$
L_{Bu}^{Ba}	45^g5396	45^g5396	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_{Bu}^{Pu}	54^g9216	54^g9230	-0^g0014	$-23 \cdot 10^{-6}$
L_{Bu}^{Bo}	25^g5763	25^g5776	-0^g0013	$-21 \cdot 10^{-6}$
L_{Bu}^{Ou}	84^g4479	84^g4512	-0^g0033	$-52 \cdot 10^{-6}$
L_{Bu}^{Le}	9^g0935	9^g0944	-0^g0009	$-14 \cdot 10^{-6}$
L_{Bu}^{Fe}	379^g6551	379^g6493	0^g0058	$92 \cdot 10^{-6}$
L_{Bu}^{Ju}	321^g9229	321^g9300	-0^g0071	$-112 \cdot 10^{-6}$
L_{Fe}^{Ba}	227^g2651	227^g2651	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_{Fe}^{Pu}	241^g6589	241^g6621	-0^g0032	$-51 \cdot 10^{-6}$
L_{Fe}^{Bo}	205^g1911	205^g1932	-0^g0021	$-33 \cdot 10^{-6}$
L_{Fe}^{Ou}	282^g7664	282^g7651	0^g0013	$20 \cdot 10^{-6}$
L_{Fe}^{Le}	200^g3188	200^g3281	-0^g0093	$-146 \cdot 10^{-6}$
L_{Fe}^{Bu}	346^g8814	346^g8828	-0^g0014	$-22 \cdot 10^{-6}$
L_{Fe}^{Ju}	45^g3766	45^g3758	0^g0008	$13 \cdot 10^{-6}$
L_{Ju}^{Ba}	235^g5486	235^g5486	0^g0000	$0 \cdot 10^{-6}$
L_{Ju}^{Pu}	246^g5905	246^g5898	0^g0007	$12 \cdot 10^{-6}$
L_{Ju}^{Ou}	272^g9820	272^g9830	-0^g0010	$-16 \cdot 10^{-6}$
L_{Ju}^{Le}	226^g9821	226^g9817	0^g0004	$7 \cdot 10^{-6}$
L_{Ju}^{Bu}	293^g0197	293^g0223	-0^g0026	$-41 \cdot 10^{-6}$
L_{Ju}^{Fe}	249^g2360	249^g2346	0^g0014	$23 \cdot 10^{-6}$



y valores de σ para cada observación y los valores de L′,

	L (μrad)	σ	L′
L_{Ba}^{Pu}	0	49	0,0
L_{Ba}^{Bo}	0	40	0,0
L_{Ba}^{Ou}	0	19	0,0
L_{Ba}^{Le}	0	20	0,0
L_{Ba}^{Be}	0	25	0,0
L_{Ba}^{Bu}	0	15	0,0
L_{Ba}^{Fe}	0	16	0,0
L_{Ba}^{Ju}	0	13	0,0
L_{Pu}^{Ba}	0	49	0,0
L_{Pu}^{Bo}	70	29	2,4
L_{Pu}^{Ou}	−96	29	−3,3
L_{Pu}^{Le}	41	25	1,7
L_{Pu}^{Be}	0	25	0,0
L_{Pu}^{Bu}	−21	18	−1,2
L_{Pu}^{Fe}	−33	19	−1,8
L_{Pu}^{Ju}	−25	14	−1,7
L_{Bo}^{Ba}	0	40	0,0
L_{Bo}^{Pu}	12	29	0,4
L_{Bo}^{Ou}	−134	17	−7,7
L_{Bo}^{Le}	−153	25	−6,2

	L (μrad)	σ	L′
L_{Bo}^{Be}	−280	41	−6,8
L_{Bo}^{Bu}	−134	15	−9,0
L_{Bo}^{Fe}	−182	17	−10,6
L_{Ou}^{Ba}	0	19	0,0
L_{Ou}^{Pu}	−16	29	−0,5
L_{Ou}^{Bo}	0	17	0,0
L_{Ou}^{Le}	0	25	0,0
L_{Ou}^{Bu}	0	30	0,0
L_{Ou}^{Fe}	0	26	0,0
L_{Ou}^{Ju}	0	18	0,0
L_{Le}^{Ba}	0	20	0,0
L_{Le}^{Pu}	0	25	0,0
L_{Le}^{Bo}	14	25	0,5
L_{Le}^{Ou}	−17	25	−0,7
L_{Le}^{Be}	0	48	0,0
L_{Le}^{Bu}	−52	27	−1,9
L_{Le}^{Fe}	−83	44	−1,9
L_{Le}^{Ju}	−44	24	−1,8
L_{Be}^{Ba}	0	25	0,0
L_{Be}^{Pu}	−18	25	−0,7

	L (μrad)	σ	L$'$
L_{Be}^{Bo}	-102	41	$-2{,}5$
L_{Be}^{Le}	160	48	3,3
L_{Bu}^{Ba}	0	15	0,0
L_{Bu}^{Pu}	-23	18	$-1{,}3$
L_{Bu}^{Bo}	-21	15	$-1{,}4$
L_{Bu}^{Ou}	-52	30	$-1{,}7$
L_{Bu}^{Le}	-14	27	$-0{,}5$
L_{Bu}^{Fe}	92	52	1,7
L_{Bu}^{Ju}	-112	34	$-3{,}3$
L_{Fe}^{Ba}	0	16	0,0
L_{Fe}^{Pu}	-51	19	$-2{,}7$

	L (μrad)	σ	L$'$
L_{Fe}^{Bo}	-33	17	$-1{,}9$
L_{Fe}^{Ou}	20	26	0,8
L_{Fe}^{Le}	-146	44	$-3{,}4$
L_{Fe}^{Bu}	-22	52	$-0{,}4$
L_{Fe}^{Ju}	13	43	0,3
L_{Ju}^{Ba}	0	13	0,0
L_{Ju}^{Pu}	12	14	0,8
L_{Ju}^{Ou}	-16	18	$-0{,}9$
L_{Ju}^{Le}	7	24	0,3
L_{Ju}^{Bu}	-41	34	$-1{,}2$
L_{Ju}^{Fe}	23	43	0,5

Se obtiene la siguiente diagonal para la matriz N^{-1}:

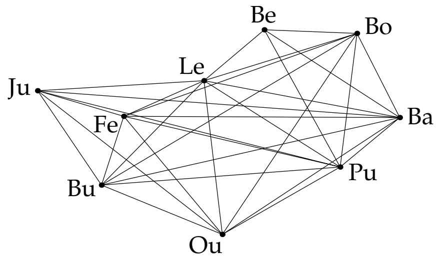
x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}
X_{Pu}	$0{,}9 \cdot 10^{-4}$	Y_{Pu}	$0{,}4 \cdot 10^{-4}$	X_{Bo}	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$	Y_{Bo}	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$
X_{Le}	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$	Y_{Le}	$0{,}9 \cdot 10^{-4}$	X_{Be}	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	Y_{Be}	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$
X_{Bu}	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$	Y_{Bu}	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	X_{Fe}	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$	Y_{Fe}	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$
X_{Ju}	$1{,}9 \cdot 10^{-4}$	Y_{Ju}	$4{,}6 \cdot 10^{-4}$				

x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}
Σ_{Ba}	$1{,}3 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Pu}	$2{,}0 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Bo}	$2{,}4 \cdot 10^{-10}$
Σ_{Ou}	$1{,}5 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Le}	$2{,}6 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Be}	$5{,}8 \cdot 10^{-10}$
Σ_{Bu}	$2{,}1 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Fe}	$2{,}2 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Ju}	$2{,}1 \cdot 10^{-10}$

Los incrementos y valores ajustados son:

	Δx	x (m)
X_{Pu}	$-0{,}013$	910,02
Y_{Pu}	0,019	2017,86
X_{Bo}	0,040	1240,32
Y_{Bo}	0,007	2403,54

	Δx	x (m)
X_{Le}	0,013	661,64
Y_{Le}	0,021	2571,80
X_{Be}	$-0{,}005$	956,72
Y_{Be}	$-0{,}008$	2606,99



	Δx	x	(m)
X_{Bu}	$-0{,}003$	122,83	
Y_{Bu}	0,011	2455,64	
X_{Fe}	0,004	335,68	

	Δx	x	(m)
Y_{Fe}	$-0{,}007$	2625,94	
X_{Ju}	$-0{,}027$	118,21	
Y_{Ju}	0,041	2884,92	

	Δx (rad)	Δx	x
Σ_{Ba}	$11 \cdot 10^{-6}$	0^g0007	2^g3707
Σ_{Pu}	$25 \cdot 10^{-6}$	0^g0016	173^g1185
Σ_{Bo}	$142 \cdot 10^{-6}$	0^g0090	69^g4082
Σ_{Ou}	$-1 \cdot 10^{-6}$	-0^g0001	326^g4137
Σ_{Le}	$29 \cdot 10^{-6}$	0^g0019	375^g0346
Σ_{Be}	$0 \cdot 10^{-6}$	0^g0000	283^g5750
Σ_{Bu}	$20 \cdot 10^{-6}$	0^g0013	77^g3894
Σ_{Fe}	$14 \cdot 10^{-6}$	0^g0009	310^g1555
Σ_{Ju}	$0 \cdot 10^{-6}$	0^g0000	306^g2958

Finalmente, los residuos normalizados y sin normalizar son

	v'	v		v'	v		v'	v
L_{Ba}^{Pu}	$-1{,}2$	-0^g0038	L_{Ba}^{Bo}	$-2{,}4$	-0^g0063	L_{Ba}^{Ou}	0,6	0^g0007
L_{Ba}^{Le}	$-1{,}0$	-0^g0014	L_{Ba}^{Be}	1,0	0^g0015	L_{Ba}^{Bu}	0,2	0^g0002
L_{Ba}^{Fe}	0,9	0^g0009	L_{Ba}^{Ju}	0,0	0^g0000	L_{Pu}^{Ba}	$-0{,}9$	-0^g0028
L_{Pu}^{Bo}	0,0	0^g0000	L_{Pu}^{Ou}	$-1{,}2$	-0^g0022	L_{Pu}^{Le}	1,0	0^g0016
L_{Pu}^{Be}	0,3	0^g0005	L_{Pu}^{Bu}	0,4	0^g0004	L_{Pu}^{Fe}	$-0{,}1$	-0^g0001

	v'	v		v'	v		v'	v
L_{Pu}^{Ju}	$-0{,}2$	$-0^{g}0002$	L_{Bo}^{Ba}	$0{,}8$	$0^{g}0021$	L_{Bo}^{Pu}	$2{,}0$	$0^{g}0038$
L_{Bo}^{Ou}	$-0{,}1$	$-0^{g}0001$	L_{Bo}^{Le}	$-0{,}9$	$-0^{g}0014$	L_{Bo}^{Be}	$-0{,}7$	$-0^{g}0018$
L_{Bo}^{Bu}	$0{,}4$	$0^{g}0004$	L_{Bo}^{Fe}	$-1{,}0$	$-0^{g}0011$	L_{Ou}^{Ba}	$0{,}0$	$-0^{g}0001$
L_{Ou}^{Pu}	$0{,}7$	$0^{g}0012$	L_{Ou}^{Bo}	$-0{,}6$	$-0^{g}0007$	L_{Ou}^{Le}	$-0{,}2$	$-0^{g}0003$
L_{Ou}^{Bu}	$-0{,}3$	$-0^{g}0006$	L_{Ou}^{Fe}	$-0{,}2$	$-0^{g}0004$	L_{Ou}^{Ju}	$0{,}8$	$0^{g}0009$
L_{Le}^{Ba}	$-0{,}1$	$-0^{g}0002$	L_{Le}^{Pu}	$-0{,}5$	$-0^{g}0007$	L_{Le}^{Bo}	$1{,}3$	$0^{g}0021$
L_{Le}^{Ou}	$0{,}3$	$0^{g}0005$	L_{Le}^{Be}	$-1{,}2$	$-0^{g}0038$	L_{Le}^{Bu}	$-0{,}4$	$-0^{g}0007$
L_{Le}^{Fe}	$0{,}8$	$0^{g}0022$	L_{Le}^{Ju}	$-0{,}4$	$-0^{g}0006$	L_{Be}^{Ba}	$0{,}5$	$0^{g}0008$
L_{Be}^{Pu}	$-1{,}4$	$-0^{g}0023$	L_{Be}^{Bo}	$0{,}2$	$0^{g}0004$	L_{Be}^{Le}	$1{,}5$	$0^{g}0045$
L_{Bu}^{Ba}	$0{,}8$	$0^{g}0007$	L_{Bu}^{Pu}	$0{,}0$	$0^{g}0000$	L_{Bu}^{Bo}	$-0{,}2$	$-0^{g}0002$
L_{Bu}^{Ou}	$-1{,}4$	$-0^{g}0026$	L_{Bu}^{Le}	$0{,}6$	$0^{g}0011$	L_{Bu}^{Fe}	$0{,}8$	$0^{g}0028$
L_{Bu}^{Ju}	$-1{,}0$	$-0^{g}0022$	L_{Fe}^{Ba}	$1{,}1$	$0^{g}0011$	L_{Fe}^{Pu}	$-1{,}6$	$-0^{g}0019$
L_{Fe}^{Bo}	$0{,}3$	$0^{g}0003$	L_{Fe}^{Ou}	$1{,}1$	$0^{g}0019$	L_{Fe}^{Le}	$-1{,}0$	$-0^{g}0028$
L_{Fe}^{Bu}	$-1{,}4$	$-0^{g}0048$	L_{Fe}^{Ju}	$0{,}2$	$0^{g}0005$	L_{Ju}^{Ba}	$-0{,}9$	$-0^{g}0007$
L_{Ju}^{Pu}	$0{,}5$	$0^{g}0005$	L_{Ju}^{Ou}	$-0{,}1$	$-0^{g}0001$	L_{Ju}^{Le}	$0{,}5$	$0^{g}0007$
L_{Ju}^{Bu}	$0{,}5$	$0^{g}0010$	L_{Ju}^{Fe}	$0{,}1$	$0^{g}0001$			

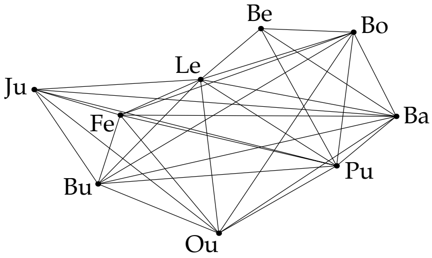
□

Este ejercicio es el primero en el que el número de observaciones supera ampliamente al de parámetros, y por ello la estimación de los residuos v' es mejor y ya aparecen muchos valores (absolutos) en torno a 1 o mayores. En ejercicios anteriores la mayoría de los valores eran subestimaciones.

7. Red con ángulos y distancias

Calcular la red anterior suponiendo que además se han observado las siguientes distancias:

$$S_{Ba}^{Pu} = 290{,}676, \qquad S_{Ba}^{Bo} = 354{,}517, \qquad S_{Ba}^{Ou} = 797{,}020,$$
$$S_{Ba}^{Le} = 746{,}931, \qquad S_{Ba}^{Be} = 605{,}509, \qquad S_{Ba}^{Bu} = 1146{,}711,$$



$S_{Ba}^{Fe} = 1034{,}749$,
$S_{Ba}^{Ju} = 1361{,}417$,

$S_{Pu}^{Ba} = 290{,}675$,
$S_{Pu}^{Bo} = 505{,}903$,
$S_{Pu}^{Ou} = 509{,}108$,
$S_{Pu}^{Le} = 604{,}793$,
$S_{Pu}^{Be} = 588{,}749$,
$S_{Pu}^{Bu} = 897{,}353$, $S_{Pu}^{Fe} = 833{,}301$, $S_{Pu}^{Ju} = 1169{,}854$,

$S_{Bo}^{Ba} = 354{,}527$, $S_{Bo}^{Pu} = 505{,}902$, $S_{Bo}^{Ou} = 908{,}249$,
$S_{Bo}^{Le} = 600{,}405$, $S_{Bo}^{Be} = 347{,}710$, $S_{Bo}^{Bu} = 1114{,}519$,
$S_{Bo}^{Fe} = 928{,}076$,

$S_{Ou}^{Ba} = 796{,}993$, $S_{Ou}^{Pu} = 509{,}107$, $S_{Ou}^{Bo} = 908{,}257$,
$S_{Ou}^{Le} = 581{,}538$, $S_{Ou}^{Bu} = 489{,}438$, $S_{Ou}^{Fe} = 577{,}380$,
$S_{Ou}^{Ju} = 877{,}877$,

$S_{Le}^{Ba} = 746{,}968$, $S_{Le}^{Pu} = 604{,}800$, $S_{Le}^{Bo} = 600{,}390$,
$S_{Le}^{Ou} = 581{,}536$, $S_{Le}^{Be} = 296{,}101$, $S_{Le}^{Bu} = 549{,}125$,
$S_{Le}^{Fe} = 329{,}165$, $S_{Le}^{Ju} = 624{,}856$,

$S_{Be}^{Ba} = 605{,}502$, $S_{Be}^{Pu} = 588{,}761$, $S_{Be}^{Bo} = 347{,}704$,
$S_{Be}^{Le} = 296{,}073$,

$S_{Bu}^{Ba} = 1146{,}725$, $S_{Bu}^{Pu} = 897{,}345$, $S_{Bu}^{Bo} = 1114{,}522$,
$S_{Bu}^{Ou} = 489{,}446$, $S_{Bu}^{Le} = 549{,}148$, $S_{Bu}^{Fe} = 271{,}576$,
$S_{Bu}^{Ju} = 427{,}730$,

$S_{Fe}^{Ba} = 1034{,}744$, $S_{Fe}^{Pu} = 833{,}269$, $S_{Fe}^{Bo} = 928{,}091$,
$S_{Fe}^{Ou} = 577{,}352$, $S_{Fe}^{Le} = 329{,}172$, $S_{Fe}^{Bu} = 271{,}588$,
$S_{Fe}^{Ju} = 336{,}943$,

$S_{Ju}^{Ba} = 1361{,}445$, $S_{Ju}^{Pu} = 1169{,}807$, $S_{Ju}^{Ou} = 877{,}900$,

$$S_{Ju}^{Le} = 624{,}837, \qquad S_{Ju}^{Bu} = 427{,}708, \qquad S_{Ju}^{Fe} = 336{,}948;$$

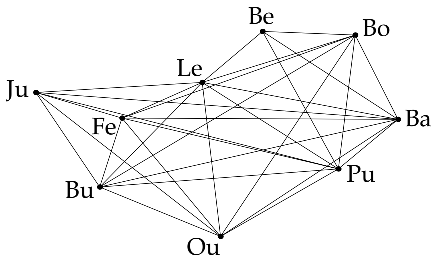
y que la precisión en estas medidas viene dada por

$$\Sigma_S^2 = 0{,}014^2 + (8 \cdot 10^{-6} S)^2 \quad \text{(m)}.$$

➡ En primer lugar observamos que el peor valor de precisión, correspondiente con la distancia más larga, es 0,018, para S_{Ba}^{Ju}. El menor será en todo caso mayor que 0,014. La diferencia entre estos valores extremos es pequeña y si no hubiese más observaciones que las distancias podríamos evitar aplicar pesos. Como de todas formas va haber que tenerlos en cuenta, al existir además observaciones angulares, aplicaremos a cada distancia el suyo.

En segundo lugar podemos disminuir el número de medidas de cara al ajuste a la mitad, promediando las lecturas recíprocas, pues son observaciones de la misma magnitud. La precisión entonces se divide por $\sqrt{2}$. Hay que recordar que la substitución de un conjunto de medidas de una misma magnitud por su promedio, con la consiguiente variación de su precisión, solo es válida para un ajuste mínimo cuadrático. Las medidas promedio y sus correspondientes valores de precisión son:

	S	σ (m)		S	σ (m)
S_{Ba}^{Pu}	290,675	0,010	S_{Pu}^{Bu}	897,349	0,011
S_{Ba}^{Bo}	354,522	0,010	S_{Pu}^{Fe}	833,285	0,011
S_{Ba}^{Ou}	797,007	0,011	S_{Pu}^{Ju}	1169,831	0,012
S_{Ba}^{Le}	746,950	0,011	S_{Bo}^{Ou}	908,253	0,011
S_{Ba}^{Be}	605,506	0,010	S_{Bo}^{Le}	600,397	0,010
S_{Ba}^{Bu}	1146,718	0,012	S_{Bo}^{Be}	347,707	0,010
S_{Ba}^{Fe}	1034,746	0,012	S_{Bo}^{Bu}	1114,520	0,012
S_{Ba}^{Ju}	1361,431	0,013	S_{Bo}^{Fe}	928,083	0,011
S_{Pu}^{Bo}	505,902	0,010	S_{Ou}^{Le}	581,537	0,010
S_{Pu}^{Ou}	509,108	0,010	S_{Ou}^{Bu}	489,442	0,010
S_{Pu}^{Le}	604,796	0,010	S_{Ou}^{Fe}	577,366	0,010
S_{Pu}^{Be}	588,755	0,010	S_{Ou}^{Ju}	877,888	0,011



	S	σ	(m)
S_{Le}^{Be}	296,087	0,010	
S_{Le}^{Bu}	549,137	0,010	
S_{Le}^{Fe}	329,168	0,010	
S_{Le}^{Ju}	624,846	0,011	
S_{Bu}^{Fe}	271,582	0,010	
S_{Bu}^{Ju}	427,719	0,010	
S_{Fe}^{Ju}	336,946	0,010	

No podemos tomar los mismos valores aproximados que en el ejercicio anterior porque la escala de la figura no era la escala real. No obstante la diferencia es pequeña, ya que se basaron en $S_{Ou}^{Ba} = 800$ m cuando en realidad es ≈ 797 m. Si empleásemos esos valores obtendríamos elementos L' de unos tres metros. Aún así puede ser suficiente para resolver el ajuste en una única iteración. De todos modos, como esta coincidencia es más bien casualidad, operaremos como si en realidad hubiese sido mayor (pero todavía relativamente pequeña ya que se emplearon distancias parecidas a las reales para poder obtener los valores de σ_{L}).

Los nuevos valores aproximados los obtenemos sin más que escalar los anteriores por el factor $797/800 \approx 0{,}99625$. Los valores calculados de las lecturas angulares no se ven afectados por un factor de escala, y con ello tampoco los términos L. Por lo que respecta a la matriz A, la variación de 0,99625 en escala no es significativa de cara a ella, y tampoco lo sería aunque hubiese sido 0,96, por ejemplo (cf. [p. 60]).

Emplearemos sin embargo unos valores aproximados ligeramente distintos, para que el lector se acostumbre al método. Tomaremos el resultado de escalar, no los valores aproximados anteriores, sino los valores ajustados. Ni que decir tiene que la variación es despreciable de cara a la matriz A. Por lo que respecta a los valores L, al ser los valores aproximados de los parámetros iguales a los valores ajustados, también serán los valores aproximados de las magnitudes observadas iguales a los ajustados, y entonces $\text{L} = \text{L} - \text{L}_0 \equiv \text{L} - L = v$, e igualmente $\text{L}' = v'$.

En cuanto a los valores fijos, ya sólo se pueden tomar tres, ya que la escala no se puede fijar libremente. Podemos mantener X e Y de Ou y tomar una de las coordenadas de Ba. Si la dirección del segmento Ou – Ba fuese una cualquiera, podríamos hacer variable indistintamente la X o la Y de Ba, pero al estar siguiendo la dirección del eje X, para dar libertad a la figura en escala y que se pueda ajustar a la escala definida por las medidas de distancia es necesario que permitamos variar la coordenada X.

Así pues los nuevos valores son los siguientes:

$$\begin{aligned}
X_{Ba0} &= 1195{,}500, & Y_{Ba} &= 2042{,}313,\\
X_{Pu0} &= 906{,}604, & Y_{Pu0} &= 2010{,}294,\\
X_{Bo0} &= 1235{,}673, & Y_{Bo0} &= 2394{,}528,\\
X_{Ou} &= 398{,}500, & Y_{Ou} &= 2042{,}313,\\
X_{Le0} &= 659{,}159, & Y_{Le0} &= 2562{,}160,\\
X_{Be0} &= 953{,}133, & Y_{Be0} &= 2597{,}217,\\
X_{Bu0} &= 122{,}372, & Y_{Bu0} &= 2446{,}432,\\
X_{Fe0} &= 334{,}425, & Y_{Fe0} &= 2616{,}090,\\
X_{Ju0} &= 117{,}767, & Y_{Ju0} &= 2874{,}097;
\end{aligned}$$

en donde todos son valores aproximados salvo X_{Ou}, Y_{Ou} e Y_{Ba}, que son fijos.

A partir de estos valores hay que calcular la matriz A y los valores calculados para las observaciones de distancia. Para las observaciones angulares es necesario calcular la columna correspondiente a X_{Ba}. Esto ya está hecho, pues estos valores son, en cada observación, los opuestos a los correspondientes a la X del otro punto. Para las lecturas desde y a partir de Ou esto no sirve, pues los valores relativos a Ou tampoco están calculados. Pero para esas observaciones $\partial L/\partial X_{Ba} = 0$. Así pues,

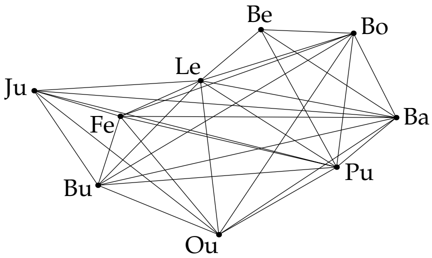
$$a'_{L^{Pu}_{Ba}, X_{Ba}} = -a'_{L^{Ou}_{Ba}, X_{Pu}} = -7{,}7, \quad \ldots \quad a'_{L^{Ba}_{Ju}, X_{Ba}} = -a'_{L^{Ba}_{Ju}, X_{Ju}} = -34{,}3.$$

Y por otra parte,

$$L'_{L^{Pu}_{Ba}} = -\left(v'_{L^{Pu}_{Ba}}\right)_{\text{ant.}} = -1{,}2, \quad \ldots \quad L'_{L^{Fe}_{Ju}} = -\left(v'_{L^{Fe}_{Ju}}\right)_{\text{ant.}} = 0{,}1,$$

en donde ant. significa anterior.

Los valores aproximados para las distancias se muestran en la página siguiente.



	S_0
S_{Ba}^{Pu}	290,665
S_{Ba}^{Bo}	354,499
S_{Ba}^{Ou}	797,000
S_{Ba}^{Le}	746,929
S_{Ba}^{Be}	605,525
S_{Ba}^{Bu}	1146,698
S_{Ba}^{Fe}	1034,733

	S_0		S_0		S_0		S_0
S_{Ba}^{Ju}	1361,387	S_{Pu}^{Bo}	505,887	S_{Pu}^{Ou}	509,112	S_{Pu}^{Le}	604,802
S_{Pu}^{Be}	588,765	S_{Pu}^{Bu}	897,350	S_{Pu}^{Fe}	833,294	S_{Pu}^{Ju}	1169,795
S_{Bo}^{Ou}	908,248	S_{Bo}^{Le}	600,390	S_{Bo}^{Be}	347,723	S_{Bo}^{Bu}	1114,510
S_{Bo}^{Fe}	928,083	S_{Ou}^{Le}	581,536	S_{Ou}^{Bu}	489,448	S_{Ou}^{Fe}	577,345
S_{Ou}^{Ju}	877,882	S_{Le}^{Be}	296,057	S_{Le}^{Bu}	549,121	S_{Le}^{Fe}	329,182
S_{Le}^{Ju}	624,828	S_{Bu}^{Fe}	271,570	S_{Bu}^{Ju}	427,690	S_{Fe}^{Ju}	336,909

Los valores L y L′,

	L (m)	σ	L′
S_{Ba}^{Pu}	0,011	0,010	1,1
S_{Ba}^{Bo}	0,023	0,010	2,3
S_{Ba}^{Ou}	0,006	0,011	0,6
S_{Ba}^{Le}	0,021	0,011	1,9
S_{Ba}^{Be}	−0,020	0,010	−1,9
S_{Ba}^{Bu}	0,020	0,012	1,7
S_{Ba}^{Fe}	0,014	0,012	1,2
S_{Ba}^{Ju}	0,044	0,013	3,5
S_{Pu}^{Bo}	0,015	0,010	1,5
S_{Pu}^{Ou}	−0,005	0,010	−0,4
S_{Pu}^{Le}	−0,005	0,010	−0,5
S_{Pu}^{Be}	−0,010	0,010	−0,9

	L (m)	σ	L′
S_{Pu}^{Bu}	−0,001	0,011	−0,1
S_{Pu}^{Fe}	−0,009	0,011	−0,8
S_{Pu}^{Ju}	0,036	0,012	3,0
S_{Bo}^{Ou}	0,005	0,011	0,5
S_{Bo}^{Le}	0,008	0,010	0,7
S_{Bo}^{Be}	−0,016	0,010	−1,6
S_{Bo}^{Bu}	0,010	0,012	0,9
S_{Bo}^{Fe}	0,001	0,011	0,1
S_{Ou}^{Le}	0,001	0,010	0,1
S_{Ou}^{Bu}	−0,006	0,010	−0,6
S_{Ou}^{Fe}	0,021	0,010	2,1
S_{Ou}^{Ju}	0,007	0,011	0,6

	L (m)	σ	L'
S_{Le}^{Be}	0,030	0,010	3,0
S_{Le}^{Bu}	0,016	0,010	1,5
S_{Le}^{Fe}	−0,014	0,010	−1,4
S_{Le}^{Ju}	0,018	0,011	1,7

	L (m)	σ	L'
S_{Bu}^{Fe}	0,012	0,010	1,2
S_{Bu}^{Ju}	0,029	0,010	2,9
S_{Fe}^{Ju}	0,036	0,010	3,6

Tras realizar los cálculos matriciales, la diagonal principal de la matriz N^{-1} es

x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}
X_{Ba}	$32 \cdot 10^{-6}$			X_{Pu}	$32 \cdot 10^{-6}$	Y_{Pu}	$22 \cdot 10^{-6}$
X_{Bo}	$37 \cdot 10^{-6}$	Y_{Bo}	$38 \cdot 10^{-6}$	X_{Le}	$42 \cdot 10^{-6}$	Y_{Le}	$21 \cdot 10^{-6}$
X_{Be}	$68 \cdot 10^{-6}$	Y_{Be}	$35 \cdot 10^{-6}$	X_{Bu}	$38 \cdot 10^{-6}$	Y_{Bu}	$48 \cdot 10^{-6}$
X_{Fe}	$47 \cdot 10^{-6}$	Y_{Fe}	$33 \cdot 10^{-6}$	X_{Ju}	$73 \cdot 10^{-6}$	Y_{Ju}	$50 \cdot 10^{-6}$

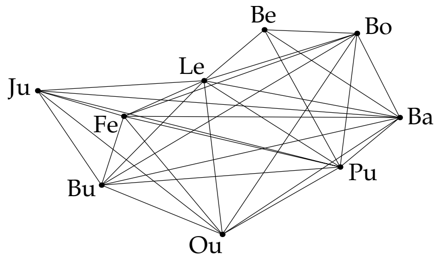
x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}
Σ_{Ba}	$0{,}7 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Pu}	$1{,}2 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Bo}	$1{,}4 \cdot 10^{-10}$
Σ_{Ou}	$1{,}1 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Le}	$1{,}4 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Be}	$3{,}7 \cdot 10^{-10}$
Σ_{Bu}	$1{,}3 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Fe}	$1{,}3 \cdot 10^{-10}$	Σ_{Ju}	$1{,}3 \cdot 10^{-10}$

Los incrementos y valores ajustados son:

	Δx	x (m)
X_{Ba}	0,011	1195,511
X_{Pu}	0,000	906,604
Y_{Pu}	0,003	2010,297
X_{Bo}	0,005	1235,678
Y_{Bo}	0,012	2394,540
X_{Le}	−0,004	659,155
Y_{Le}	0,005	2562,165

	Δx	x (m)
X_{Be}	0,018	953,151
Y_{Be}	−0,003	2597,214
X_{Bu}	−0,009	122,363
Y_{Bu}	−0,005	2446,427
X_{Fe}	0,002	334,427
Y_{Fe}	0,003	2616,094
X_{Ju}	−0,019	117,747
Y_{Ju}	0,020	2874,117

	Δx (rad)	Δx	x
Σ_{Ba}	$-3 \cdot 10^{-6}$	$-0^{g}0002$	$2^{g}3705$
Σ_{Pu}	$-1 \cdot 10^{-6}$	$0^{g}0000$	$173^{g}1185$



	Δx (rad)	Δx	x
Σ_{Bo}	$-13\cdot 10^{-6}$	$-0^{g}0008$	$69^{g}4074$
Σ_{Ou}	$-8\cdot 10^{-6}$	$-0^{g}0005$	$326^{g}4132$
Σ_{Le}	$-6\cdot 10^{-6}$	$-0^{g}0004$	$375^{g}0342$
Σ_{Be}	$16\cdot 10^{-6}$	$0^{g}0010$	$283^{g}5760$
Σ_{Bu}	$-14\cdot 10^{-6}$	$-0^{g}0009$	$77^{g}3885$
Σ_{Fe}	$-3\cdot 10^{-6}$	$-0^{g}0002$	$310^{g}1553$
Σ_{Ju}	$-4\cdot 10^{-6}$	$-0^{g}0003$	$306^{g}2955$

Y por último los residuos:

	v'	v		v'	v		v'	v
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Pu}}$	$-1{,}6$	$-0^{g}0050$	$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Bo}}$	$-2{,}0$	$-0^{g}0052$	$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Ou}}$	$0{,}4$	$0^{g}0005$
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Le}}$	$-0{,}8$	$-0^{g}0010$	$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Be}}$	$0{,}5$	$0^{g}0007$	$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Bu}}$	$0{,}6$	$0^{g}0006$
$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Fe}}$	$0{,}8$	$0^{g}0008$	$L_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Ju}}$	$-0{,}2$	$-0^{g}0001$	$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ba}}$	$-1{,}2$	$-0^{g}0039$
$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Bo}}$	$0{,}1$	$0^{g}0002$	$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ou}}$	$-1{,}0$	$-0^{g}0018$	$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Le}}$	$1{,}2$	$0^{g}0019$
$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Be}}$	$-0{,}9$	$-0^{g}0015$	$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Bu}}$	$1{,}0$	$0^{g}0012$	$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Fe}}$	$-0{,}2$	$-0^{g}0003$
$L_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ju}}$	$-0{,}1$	$-0^{g}0001$	$L_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Ba}}$	$1{,}0$	$0^{g}0025$	$L_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Pu}}$	$1{,}7$	$0^{g}0032$
$L_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Ou}}$	$-0{,}2$	$-0^{g}0003$	$L_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Le}}$	$-0{,}7$	$-0^{g}0011$	$L_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Be}}$	$-0{,}6$	$-0^{g}0017$
$L_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Bu}}$	$0{,}6$	$0^{g}0006$	$L_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Fe}}$	$-1{,}1$	$-0^{g}0012$	$L_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Ba}}$	$-0{,}5$	$-0^{g}0006$
$L_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Pu}}$	$0{,}6$	$0^{g}0011$	$L_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Bo}}$	$-0{,}5$	$-0^{g}0006$	$L_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Le}}$	$-0{,}1$	$-0^{g}0002$
$L_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Bu}}$	$0{,}1$	$0^{g}0002$	$L_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Fe}}$	$-0{,}7$	$-0^{g}0012$	$L_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Ju}}$	$1{,}1$	$0^{g}0012$
$L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Ba}}$	$0{,}0$	$0^{g}0000$	$L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Pu}}$	$-0{,}5$	$-0^{g}0007$	$L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Bo}}$	$1{,}7$	$0^{g}0027$

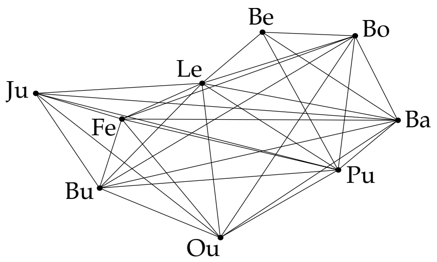
	v'	v		v'	v		v'	v
L_{Le}^{Ou}	0,5	$0^{g}0008$	L_{Le}^{Be}	−2,1	$-0^{g}0064$	L_{Le}^{Bu}	0,0	$-0^{g}0001$
L_{Le}^{Fe}	0,7	$0^{g}0019$	L_{Le}^{Ju}	−1,0	$-0^{g}0016$	L_{Be}^{Ba}	0,8	$0^{g}0013$
L_{Be}^{Pu}	−2,0	$-0^{g}0032$	L_{Be}^{Bo}	0,9	$0^{g}0024$	L_{Be}^{Le}	1,1	$0^{g}0033$
L_{Bu}^{Ba}	0,5	$0^{g}0005$	L_{Bu}^{Pu}	−0,1	$-0^{g}0001$	L_{Bu}^{Bo}	−0,1	$-0^{g}0001$
L_{Bu}^{Ou}	−1,1	$-0^{g}0022$	L_{Bu}^{Le}	0,7	$0^{g}0012$	L_{Bu}^{Fe}	0,6	$0^{g}0019$
L_{Bu}^{Ju}	−0,7	$-0^{g}0016$	L_{Fe}^{Ba}	1,1	$0^{g}0011$	L_{Fe}^{Pu}	−1,9	$-0^{g}0022$
L_{Fe}^{Bo}	0,7	$0^{g}0007$	L_{Fe}^{Ou}	0,9	$0^{g}0014$	L_{Fe}^{Le}	−1,1	$-0^{g}0029$
L_{Fe}^{Bu}	−1,5	$-0^{g}0050$	L_{Fe}^{Ju}	0,5	$0^{g}0013$	L_{Ju}^{Ba}	−1,1	$-0^{g}0009$
L_{Ju}^{Pu}	0,4	$0^{g}0004$	L_{Ju}^{Ou}	0,4	$0^{g}0005$	L_{Ju}^{Le}	−0,1	$-0^{g}0002$
L_{Ju}^{Bu}	1,0	$0^{g}0022$	L_{Ju}^{Fe}	0,3	$0^{g}0009$			

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
S_{Ba}^{Pu}	0,0	0,000	S_{Ba}^{Bo}	−1,1	−0,011	S_{Ba}^{Ou}	0,4	0,004
S_{Ba}^{Le}	−0,6	−0,006	S_{Ba}^{Be}	1,4	0,014	S_{Ba}^{Bu}	−0,3	−0,004
S_{Ba}^{Fe}	−0,4	−0,005	S_{Ba}^{Ju}	−0,7	−0,008	S_{Pu}^{Bo}	−0,5	−0,005
S_{Pu}^{Ou}	0,4	0,004	S_{Pu}^{Le}	0,8	0,008	S_{Pu}^{Be}	0,5	0,005
S_{Pu}^{Bu}	0,4	0,004	S_{Pu}^{Fe}	0,7	0,008	S_{Pu}^{Ju}	−0,9	−0,010
S_{Bo}^{Ou}	0,4	0,004	S_{Bo}^{Le}	0,0	−0,001	S_{Bo}^{Be}	−0,3	−0,003
S_{Bo}^{Bu}	0,2	0,003	S_{Bo}^{Fe}	0,0	0,000	S_{Ou}^{Le}	0,2	0,002
S_{Ou}^{Bu}	0,6	0,007	S_{Ou}^{Fe}	−1,7	−0,018	S_{Ou}^{Ju}	1,7	0,018
S_{Le}^{Be}	−0,9	−0,009	S_{Le}^{Bu}	−0,9	−0,009	S_{Le}^{Fe}	0,7	0,007
S_{Le}^{Ju}	0,2	0,002	S_{Bu}^{Fe}	0,2	0,002	S_{Bu}^{Ju}	−0,4	−0,004
S_{Fe}^{Ju}	−1,0	−0,010						

□

Tomar como valores aproximados los valores ajustados de un ajuste anterior es la solución más fácil. Por una parte los términos L ya dan una idea de los errores cometidos y evita toda comprobación preliminar de cierres. Además los incrementos de los parámetros resultantes son la diferencia entre los resultados de ambos ajustes.

8. Red con ángulos, distancias y medidas directas



En la red anterior, suponer que además se tienen las siguientes medidas directas:

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{Ba}} &= 6647{,}786, \\ Y_{\mathrm{Ba}} &= 507{,}476, \\ X_{\mathrm{Ou}} &= 5982{,}537, \\ Y_{\mathrm{Ou}} &= 68{,}533, \\ X_{\mathrm{Ju}} &= 5290{,}103, \\ Y_{\mathrm{Ju}} &= 608{,}217; \end{aligned}$$

con precisión $\sigma = 1{,}2$ cm.

a) Ajustar la red.
b) V. pág. 103.

El tener observación directa de seis coordenadas no aporta seis redundancias más a la figura. Tres observaciones son necesarias simplemente para fijar la figura en posición, por lo que el aprote es en realidad el de tres observaciones ([p. 80]).

***a*)** El primer paso es calcular valores aproximados. Podemos obtener unos a partir de los del ejercicio anterior mediante un giro y una traslación. Tomamos para ellos los valores ajustados en lugar de los aproximados. Se puede calcular los parámetros del movimiento empleando todos los puntos, en este caso 3, pero dado que se trata de valores aproximados es suficiente con tomar el conjunto mínimo de puntos: 2. Calculamos pues a partir de Ou y Ba, por ejemplo.

En el sistema de las coordenadas observadas,

$$\frac{Y_{\mathrm{Ba}} - Y_{\mathrm{Ou}}}{X_{\mathrm{Ba}} - X_{\mathrm{Ou}}} \approx 0{,}65982.$$

En el sistema empleado en el ajuste anterior los puntos Ou y Ba están sobre un mismo eje X. Entonces el ángulo de giro a aplicar cumple $\tan\alpha = 0{,}65982$, de donde $\cos\alpha = 0{,}83468$ y $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}55074$ y la transformación es

$$X_1 = 0{,}83468X_2 - 0{,}55074Y_2$$
$$Y_1 = 0{,}55074X_2 + 0{,}83468Y_2.$$

Al girar toda la figura un ángulo α también se gira con ella los orígenes de las lecturas angulares de cada estación; es decir, la desorientación. Pero como el ángulo α lo estamos midiendo en sentido contrario a las lecturas (giramos en sentido retrógrado), a todos los valores de desorientación hay que restar $\alpha = \arctan 0{,}65982 = 37^g1306$. Se obtienen los valores siguientes:

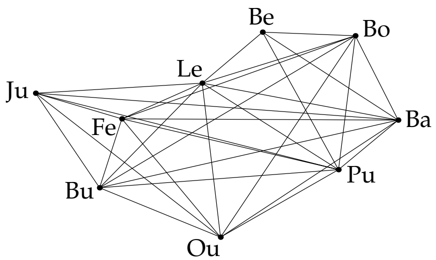
	X	Y	Σ
Ba	−126,908	2363,087	365^g2398
Pu	−350,421	2177,253	135^g9878
Bo	−287,367	2679,206	32^g2768
Ou	−792,157	1924,144	289^g2826
Le	−860,895	2501,606	337^g9036
Be	−634,806	2692,776	246^g4454
Bu	−1245,203	2109,371	40^g2578
Fe	−1161,640	2367,780	273^g0247
Ju	−1484,600	2463,813	269^g1649

Falta aplicar una traslación, que podemos calcular a partir de Ba:

$$T_X = 6647{,}786 - (-126{,}908) = 6774{,}694,$$
$$T_Y = 507{,}476 - 2363{,}087 = -1855{,}611.$$

Con esto los valores aproximados para este problema son

	X_0	Y_0	Σ_0
Ba	6647,786	507,476	365^g2398
Pu	6424,274	321,643	135^g9878
Bo	6487,328	823,595	32^g2768
Ou	5982,538	68,533	289^g2826
Le	5913,799	645,995	337^g9036
Be	6139,889	837,165	246^g4454



	X_0	Y_0
Bu	5529,492	253,760
Fe	5613,055	512,169
Ju	5290,094	608,202

$$\Sigma_{\mathrm{Bu}\,0} = 40^g 2578,$$
$$\Sigma_{\mathrm{Fe}\,0} = 273^g 0247,$$
$$\Sigma_{\mathrm{Ju}\,0} = 269^g 1649.$$

En función de estos valores se calcula la matriz A, que ya es «completa» porque no hay ninguna coordenada fija: están todas las columnas. Además de las filas correspondientes a lecturas angulares y medidas de distancia existen las filas de las observaciones directas. Estas son:

$$v_{X_{Ba}} = 0 - \Delta x_{Ba}, \qquad v_{Y_{Ba}} = 0 - \Delta y_{Ba},$$
$$v_{X_{Ou}} = -0{,}001 - \Delta x_{Ou}, \qquad v_{Y_{Ou}} = -0{,}001 - \Delta y_{Ou},$$
$$v_{X_{Ju}} = 0{,}009 - \Delta x_{Ju}, \qquad v_{Y_{Ju}} = 0{,}015 - \Delta y_{Ju}.$$

Los coeficientes a' y L' de las ecuaciones v' los obtenemos dividiendo por su σ_{L}, es decir, 0,012 m:

$$v'_{X_{Ba}} = 0{,}0 - 83\,\Delta x_{Ba}, \qquad v_{Y_{Ba}} = 0{,}0 - 83\,\Delta y_{Ba},$$
$$v'_{X_{Ou}} = -0{,}1 - 83\,\Delta x_{Ou}, \qquad v_{Y_{Ou}} = 0{,}0 - 83\,\Delta y_{Ou},$$
$$v'_{X_{Ju}} = 0{,}7 - 83\,\Delta x_{Ju}, \qquad v_{Y_{Ju}} = 1{,}2 - 83\,\Delta y_{Ju}.$$

Los términos L' de las demás observaciones son los mismos que los residuos del ejercicio anterior, por haber tomado los valores ajustados de aquél como valores aproximados de éste, salvo por un giro y una traslación que no afectan a ángulos y distancias.

En esta ocasión los términos de la diagonal de la matriz N^{-1} son

x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}
X_{Ba}	$59\cdot10^{-6}$	Y_{Ba}	$112\cdot10^{-6}$	X_{Pu}	$68\cdot10^{-6}$	Y_{Pu}	$99\cdot10^{-6}$
X_{Bo}	$102\cdot10^{-6}$	Y_{Bo}	$111\cdot10^{-6}$	X_{Ou}	$71\cdot10^{-6}$	Y_{Ou}	$58\cdot10^{-6}$
X_{Le}	$76\cdot10^{-6}$	Y_{Le}	$68\cdot10^{-6}$	X_{Be}	$118\cdot10^{-6}$	Y_{Be}	$90\cdot10^{-6}$
X_{Bu}	$71\cdot10^{-6}$	Y_{Bu}	$103\cdot10^{-6}$	X_{Fe}	$69\cdot10^{-6}$	Y_{Fe}	$91\cdot10^{-6}$
X_{Ju}	$64\cdot10^{-6}$	Y_{Ju}	$113\cdot10^{-6}$				

x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}
Σ_{Ba}	$1{,}9\cdot10^{-10}$	Σ_{Pu}	$2{,}2\cdot10^{-10}$	Σ_{Bo}	$2{,}5\cdot10^{-10}$
Σ_{Ou}	$2{,}2\cdot10^{-10}$	Σ_{Le}	$2{,}4\cdot10^{-10}$	Σ_{Be}	$4{,}8\cdot10^{-10}$
Σ_{Bu}	$2{,}3\cdot10^{-10}$	Σ_{Fe}	$2{,}3\cdot10^{-10}$	Σ_{Ju}	$2{,}0\cdot10^{-10}$

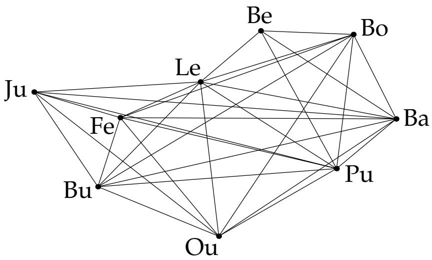
Los incrementos y valores ajustados:

	Δx	x (m)		Δx	x (m)
X_{Ba}	0,004	6647,790	Y_{Le}	0,005	646,001
Y_{Ba}	−0,003	507,474	X_{Be}	0,007	6139,896
X_{Pu}	0,002	6424,276	Y_{Be}	0,003	837,168
Y_{Pu}	−0,001	321,642	X_{Bu}	0,001	5529,493
X_{Bo}	0,007	6487,335	Y_{Bu}	0,010	253,770
Y_{Bo}	−0,001	823,594	X_{Fe}	0,004	5613,059
X_{Ou}	−0,001	5982,537	Y_{Fe}	0,009	512,178
Y_{Ou}	0,004	68,537	X_{Ju}	0,006	5290,100
X_{Le}	0,005	5913,805	Y_{Ju}	0,013	608,215

	Δx (rad)	Δx	x
Σ_{Ba}	$11\cdot10^{-6}$	0^g0007	365^g2405
Σ_{Pu}	$11\cdot10^{-6}$	0^g0007	135^g9886
Σ_{Bo}	$11\cdot10^{-6}$	0^g0007	32^g2775
Σ_{Ou}	$11\cdot10^{-6}$	0^g0007	289^g2833
Σ_{Le}	$11\cdot10^{-6}$	0^g0007	337^g9043
Σ_{Be}	$11\cdot10^{-6}$	0^g0007	246^g4461
Σ_{Bu}	$11\cdot10^{-6}$	0^g0007	40^g2586
Σ_{Fe}	$11\cdot10^{-6}$	0^g0007	273^g0254
Σ_{Ju}	$12\cdot10^{-6}$	0^g0007	269^g1656

Los residuos difieren poco de los anteriores:

	v'	v		v'	v		v'	v
$L_{\text{Ba}}^{\text{Pu}}$	−1,6	-0^g0049	$L_{\text{Ba}}^{\text{Bo}}$	−2,0	-0^g0053	$L_{\text{Ba}}^{\text{Ou}}$	0,4	0^g0005
$L_{\text{Ba}}^{\text{Le}}$	−0,8	-0^g0010	$L_{\text{Ba}}^{\text{Be}}$	0,5	0^g0007	$L_{\text{Ba}}^{\text{Bu}}$	0,6	0^g0006



	v'	v
L_{Ba}^{Fe}	0,8	$0^{g}0008$
L_{Ba}^{Ju}	−0,2	$-0^{g}0002$
L_{Pu}^{Ba}	−1,2	$-0^{g}0038$
L_{Pu}^{Bo}	0,1	$0^{g}0003$
L_{Pu}^{Ou}	−1,0	$-0^{g}0018$
L_{Pu}^{Le}	1,2	$0^{g}0019$

	v'	v		v'	v		v'	v
L_{Pu}^{Be}	−0,9	$-0^{g}0015$	L_{Pu}^{Bu}	1,0	$0^{g}0012$	L_{Pu}^{Fe}	−0,2	$-0^{g}0003$
L_{Pu}^{Ju}	−0,1	$-0^{g}0001$	L_{Bo}^{Ba}	1,0	$0^{g}0025$	L_{Bo}^{Pu}	1,7	$0^{g}0032$
L_{Bo}^{Ou}	−0,2	$-0^{g}0002$	L_{Bo}^{Le}	−0,7	$-0^{g}0011$	L_{Bo}^{Be}	−0,7	$-0^{g}0017$
L_{Bo}^{Bu}	0,6	$0^{g}0006$	L_{Bo}^{Fe}	−1,1	$-0^{g}0013$	L_{Ou}^{Ba}	−0,4	$-0^{g}0005$
L_{Ou}^{Pu}	0,6	$0^{g}0012$	L_{Ou}^{Bo}	−0,5	$-0^{g}0005$	L_{Ou}^{Le}	−0,1	$-0^{g}0002$
L_{Ou}^{Bu}	0,1	$0^{g}0002$	L_{Ou}^{Fe}	−0,7	$-0^{g}0012$	L_{Ou}^{Ju}	1,0	$0^{g}0011$
L_{Le}^{Ba}	0,0	$0^{g}0001$	L_{Le}^{Pu}	−0,5	$-0^{g}0007$	L_{Le}^{Bo}	1,7	$0^{g}0027$
L_{Le}^{Ou}	0,5	$0^{g}0008$	L_{Le}^{Be}	−2,1	$-0^{g}0064$	L_{Le}^{Bu}	0,0	$0^{g}0000$
L_{Le}^{Fe}	0,7	$0^{g}0019$	L_{Le}^{Ju}	−1,1	$-0^{g}0016$	L_{Be}^{Ba}	0,8	$0^{g}0013$
L_{Be}^{Pu}	−2,0	$-0^{g}0032$	L_{Be}^{Bo}	0,9	$0^{g}0024$	L_{Be}^{Le}	1,1	$0^{g}0033$
L_{Bu}^{Ba}	0,5	$0^{g}0005$	L_{Bu}^{Pu}	−0,1	$-0^{g}0001$	L_{Bu}^{Bo}	−0,1	$-0^{g}0001$
L_{Bu}^{Ou}	−1,2	$-0^{g}0022$	L_{Bu}^{Le}	0,7	$0^{g}0012$	L_{Bu}^{Fe}	0,6	$0^{g}0019$
L_{Bu}^{Ju}	−0,8	$-0^{g}0017$	L_{Fe}^{Ba}	1,1	$0^{g}0011$	L_{Fe}^{Pu}	−1,9	$-0^{g}0022$
L_{Fe}^{Bo}	0,7	$0^{g}0007$	L_{Fe}^{Ou}	0,8	$0^{g}0014$	L_{Fe}^{Le}	−1,1	$-0^{g}0029$
L_{Fe}^{Bu}	−1,5	$-0^{g}0049$	L_{Fe}^{Ju}	0,4	$0^{g}0012$	L_{Ju}^{Ba}	−1,1	$-0^{g}0009$
L_{Ju}^{Pu}	0,4	$0^{g}0004$	L_{Ju}^{Ou}	0,4	$0^{g}0005$	L_{Ju}^{Le}	−0,1	$-0^{g}0002$
L_{Ju}^{Bu}	1,0	$0^{g}0022$	L_{Ju}^{Fe}	0,3	$0^{g}0008$			

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
S_{Ba}^{Pu}	0,1	0,001	S_{Ba}^{Bo}	1,2	0,012	S_{Ba}^{Ou}	−0,4	−0,004
S_{Ba}^{Le}	0,6	0,007	S_{Ba}^{Be}	−1,3	−0,014	S_{Ba}^{Bu}	0,3	0,004

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
S_{Ba}^{Fe}	0,4	0,005	S_{Ba}^{Ju}	0,7	0,009	S_{Pu}^{Bo}	0,5	0,005
S_{Pu}^{Ou}	−0,4	−0,004	S_{Pu}^{Le}	−0,8	−0,008	S_{Pu}^{Be}	−0,5	−0,005
S_{Pu}^{Bu}	−0,4	−0,004	S_{Pu}^{Fe}	−0,7	−0,008	S_{Pu}^{Ju}	0,9	0,011
S_{Bo}^{Ou}	−0,4	−0,005	S_{Bo}^{Le}	0,1	0,001	S_{Bo}^{Be}	0,3	0,003
S_{Bo}^{Bu}	−0,2	−0,002	S_{Bo}^{Fe}	0,0	0,000	S_{Ou}^{Le}	−0,2	−0,002
S_{Ou}^{Bu}	−0,7	−0,007	S_{Ou}^{Fe}	1,7	0,018	S_{Ou}^{Ju}	−1,7	−0,019
S_{Le}^{Be}	0,9	0,009	S_{Le}^{Bu}	0,9	0,009	S_{Le}^{Fe}	−0,7	−0,007
S_{Le}^{Ju}	−0,2	−0,002	S_{Bu}^{Fe}	−0,2	−0,002	S_{Bu}^{Ju}	0,4	0,004
S_{Fe}^{Ju}	1,0	0,010						

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
X_{Ba}	−0,3	−0,004	Y_{Ba}	0,2	0,003	X_{Ou}	0,0	0,000
Y_{Ou}	−0,4	−0,005	X_{Ju}	0,3	0,003	Y_{Ju}	0,2	0,002

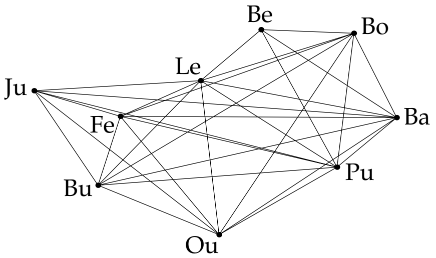
b) Suponer que al cabo de un tiempo se vuelve a observar la red y los valores observados son los que se muestran a continuación. Calcular con los nuevos valores.

$$L_{Ba}^{Pu} = 290^g6007,\quad L_{Ba}^{Bo} = 4^g8607,\quad L_{Ba}^{Ou} = 297^g6288,$$
$$L_{Ba}^{Le} = 346^g6361,\quad L_{Ba}^{Be} = 371^g4120,\quad L_{Ba}^{Bu} = 320^g5564,$$
$$L_{Ba}^{Fe} = 335^g0485,\quad L_{Ba}^{Ju} = 339^g4736,$$

$$L_{Pu}^{Ba} = 319^g8622,\quad L_{Pu}^{Bo} = 271^g9670,\quad L_{Pu}^{Ou} = 130^g8860,$$
$$L_{Pu}^{Le} = 200^g0469,\quad L_{Pu}^{Be} = 231^g9185,\quad L_{Pu}^{Bu} = 159^g1913,$$
$$L_{Pu}^{Fe} = 178^g6979,\quad L_{Pu}^{Ju} = 179^g7668,$$

$$L_{Bo}^{Ba} = 137^g8210,\quad L_{Bo}^{Pu} = 175^g6798,\quad L_{Bo}^{Ou} = 205^g2405,$$
$$L_{Bo}^{Le} = 248^g6049,\quad L_{Bo}^{Be} = 270^g2064,\quad L_{Bo}^{Bu} = 233^g5575,$$
$$L_{Bo}^{Fe} = 245^g9370,$$

$$L_{Ou}^{Ba} = 173^g5850,\quad L_{Ou}^{Pu} = 177^g5922,\quad L_{Ou}^{Bo} = 148^g2357,$$
$$L_{Ou}^{Le} = 103^g1755,\quad L_{Ou}^{Bu} = 35^g4272,\quad L_{Ou}^{Fe} = 66^g5068,$$



$L_{\mathrm{Ou}}^{\mathrm{Ju}} = 52^{g}8649,$

$L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Ba}} = 173^{g}9702,$
$L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Pu}} = 198^{g}1312,$
$L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Bo}} = 142^{g}9787,$
$L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Ou}} = 254^{g}5540,$
$L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Be}} = 117^{g}4182,$
$L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Bu}} = 311^{g}4485,$
$L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Fe}} = 335^{g}4455,$ $\quad L_{\mathrm{Le}}^{\mathrm{Ju}} = 358^{g}2422,$

$L_{\mathrm{Be}}^{\mathrm{Ba}} = 290^{g}2058,$ $\quad L_{\mathrm{Be}}^{\mathrm{Pu}} = 321^{g}4624,$ $\quad L_{\mathrm{Be}}^{\mathrm{Bo}} = 256^{g}0433,$
$L_{\mathrm{Be}}^{\mathrm{Le}} = 8^{g}8689,$

$L_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Ba}} = 45^{g}5389,$ $\quad L_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Pu}} = 54^{g}9218,$ $\quad L_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Bo}} = 25^{g}5753,$
$L_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Ou}} = 84^{g}4526,$ $\quad L_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Le}} = 9^{g}0947,$ $\quad L_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Fe}} = 379^{g}6535,$
$L_{\mathrm{Bu}}^{\mathrm{Ju}} = 321^{g}9207,$

$L_{\mathrm{Fe}}^{\mathrm{Ba}} = 227^{g}2644,$ $\quad L_{\mathrm{Fe}}^{\mathrm{Pu}} = 241^{g}6614,$ $\quad L_{\mathrm{Fe}}^{\mathrm{Bo}} = 205^{g}1895,$
$L_{\mathrm{Fe}}^{\mathrm{Ou}} = 282^{g}7661,$ $\quad L_{\mathrm{Fe}}^{\mathrm{Le}} = 200^{g}3195,$ $\quad L_{\mathrm{Fe}}^{\mathrm{Bu}} = 346^{g}8877,$
$L_{\mathrm{Fe}}^{\mathrm{Ju}} = 45^{g}3755,$

$L_{\mathrm{Ju}}^{\mathrm{Ba}} = 235^{g}5501,$ $\quad L_{\mathrm{Ju}}^{\mathrm{Pu}} = 246^{g}5910,$ $\quad L_{\mathrm{Ju}}^{\mathrm{Ou}} = 272^{g}9817,$
$L_{\mathrm{Ju}}^{\mathrm{Le}} = 226^{g}9833,$ $\quad L_{\mathrm{Ju}}^{\mathrm{Bu}} = 293^{g}0211,$ $\quad L_{\mathrm{Ju}}^{\mathrm{Fe}} = 249^{g}2385;$

$S_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Pu}} = 290{,}664,$ $\quad S_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Bo}} = 354{,}504,$ $\quad S_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Ou}} = 797{,}030,$
$S_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Le}} = 746{,}921,$ $\quad S_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Be}} = 605{,}492,$ $\quad S_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Bu}} = 1146{,}718,$
$S_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Fe}} = 1034{,}741,$ $\quad S_{\mathrm{Ba}}^{\mathrm{Ju}} = 1361{,}412,$

$S_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ba}} = 290{,}673,$ $\quad S_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Bo}} = 505{,}887,$ $\quad S_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ou}} = 509{,}126,$
$S_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Le}} = 604{,}798,$ $\quad S_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Be}} = 588{,}746,$ $\quad S_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Bu}} = 897{,}383,$
$S_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Fe}} = 833{,}322,$ $\quad S_{\mathrm{Pu}}^{\mathrm{Ju}} = 1169{,}823,$

$S_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Ba}} = 354{,}540,$ $\quad S_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Pu}} = 505{,}919,$ $\quad S_{\mathrm{Bo}}^{\mathrm{Ou}} = 908{,}254,$

$$S_{Bo}^{Le} = 600{,}373, \quad S_{Bo}^{Be} = 347{,}707, \quad S_{Bo}^{Bu} = 1114{,}554,$$
$$S_{Bo}^{Fe} = 928{,}082,$$

$$S_{Ou}^{Ba} = 797{,}015, \quad S_{Ou}^{Pu} = 509{,}136, \quad S_{Ou}^{Bo} = 908{,}250,$$
$$S_{Ou}^{Le} = 581{,}535, \quad S_{Ou}^{Bu} = 489{,}471, \quad S_{Ou}^{Fe} = 577{,}355,$$
$$S_{Ou}^{Ju} = 877{,}922,$$

$$S_{Le}^{Ba} = 746{,}916, \quad S_{Le}^{Pu} = 604{,}805, \quad S_{Le}^{Bo} = 600{,}402,$$
$$S_{Le}^{Ou} = 581{,}550, \quad S_{Le}^{Be} = 296{,}065, \quad S_{Le}^{Bu} = 549{,}161,$$
$$S_{Le}^{Fe} = 329{,}188, \quad S_{Le}^{Ju} = 624{,}853,$$

$$S_{Be}^{Ba} = 605{,}522, \quad S_{Be}^{Pu} = 588{,}747, \quad S_{Be}^{Bo} = 347{,}745,$$
$$S_{Be}^{Le} = 296{,}066,$$

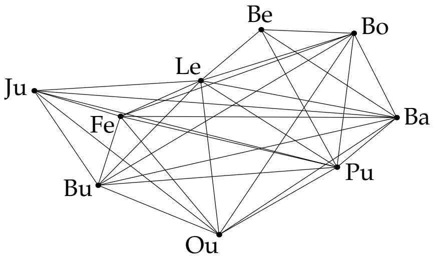
$$S_{Bu}^{Ba} = 1146{,}746, \quad S_{Bu}^{Pu} = 897{,}351, \quad S_{Bu}^{Bo} = 1114{,}558,$$
$$S_{Bu}^{Ou} = 489{,}439, \quad S_{Bu}^{Le} = 549{,}118, \quad S_{Bu}^{Fe} = 271{,}607,$$
$$S_{Bu}^{Ju} = 427{,}706,$$

$$S_{Fe}^{Ba} = 1034{,}734, \quad S_{Fe}^{Pu} = 833{,}298, \quad S_{Fe}^{Bo} = 928{,}052,$$
$$S_{Fe}^{Ou} = 577{,}360, \quad S_{Fe}^{Le} = 329{,}190, \quad S_{Fe}^{Bu} = 271{,}595,$$
$$S_{Fe}^{Ju} = 336{,}948,$$

$$S_{Ju}^{Ba} = 1361{,}415, \quad S_{Ju}^{Pu} = 1169{,}825, \quad S_{Ju}^{Ou} = 877{,}914,$$
$$S_{Ju}^{Le} = 624{,}862, \quad S_{Ju}^{Bu} = 427{,}716, \quad S_{Ju}^{Fe} = 336{,}944;$$

$$X_{Ba} = 6647{,}774, \quad Y_{Ba} = 507{,}465, \quad X_{Ou} = 5982{,}533, \quad Y_{Ou} = 68{,}526,$$
$$X_{Ju} = 5290{,}108, \quad Y_{Ju} = 608{,}208.$$

b) Sirven los mismos valores aproximados que en el cálculo anterior, y en consecuencia también las matrices A y N, y lo que es más importante, la matriz N^{-1}. Los valores aproximados de las observaciones también son los mismos y en consecuencia solamente hay que calcular los vectores L y L′, el producto $A'^{T}L'$ y el vector X_{Δ}. También podríamos tomar los valores ajustados, lo que no afecta a las matrices. Dado que esto es lo que hicimos en los ajustes previos, tomaremos ahora los valores aproximados.



Comenzamos al igual que en el ejercicio anterior promediando las medidas de distancia recíprocas y tomando los valores resultantes como las observaciones originales.

$$S_{Ba}^{Pu} = 290{,}668,$$
$$S_{Ba}^{Bo} = 354{,}522,$$

$$S_{Ba}^{Ou} = 797{,}023, \quad S_{Ba}^{Le} = 746{,}919, \quad S_{Ba}^{Be} = 605{,}507,$$
$$S_{Ba}^{Bu} = 1146{,}732, \quad S_{Ba}^{Fe} = 1034{,}737, \quad S_{Ba}^{Ju} = 1361{,}414,$$

$$S_{Pu}^{Bo} = 505{,}903, \quad S_{Pu}^{Ou} = 509{,}131, \quad S_{Pu}^{Le} = 604{,}801,$$
$$S_{Pu}^{Be} = 588{,}746, \quad S_{Pu}^{Bu} = 897{,}367,$$
$$S_{Pu}^{Fe} = 833{,}310, \quad S_{Pu}^{Ju} = 1169{,}824,$$

$$S_{Bo}^{Ou} = 908{,}252, \quad S_{Bo}^{Le} = 600{,}388, \quad S_{Bo}^{Be} = 347{,}726,$$
$$S_{Bo}^{Bu} = 1114{,}556, \quad S_{Bo}^{Fe} = 928{,}067,$$

$$S_{Ou}^{Le} = 581{,}542, \quad S_{Ou}^{Bu} = 489{,}455, \quad S_{Ou}^{Fe} = 577{,}357,$$
$$S_{Ou}^{Ju} = 877{,}918,$$

$$S_{Le}^{Be} = 296{,}065, \quad S_{Le}^{Bu} = 549{,}140, \quad S_{Le}^{Fe} = 329{,}189,$$
$$S_{Le}^{Ju} = 624{,}857,$$

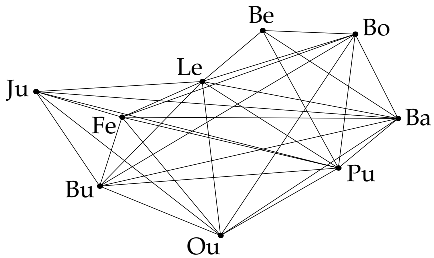
$$S_{Bu}^{Fe} = 271{,}601, \quad S_{Bu}^{Ju} = 427{,}711, \quad S_{Fe}^{Ju} = 336{,}946.$$

Los vectores L y L′ son

	L	L′		L	L′		L	L′
L_{Ba}^{Pu}	-0^g0028	$-0{,}9$	L_{Ba}^{Bo}	0^g0026	$1{,}0$	L_{Ba}^{Ou}	-0^g0007	$-0{,}6$
L_{Ba}^{Le}	0^g0012	$0{,}9$	L_{Ba}^{Be}	-0^g0022	$-1{,}4$	L_{Ba}^{Bu}	-0^g0007	$-0{,}8$
L_{Ba}^{Fe}	-0^g0004	$-0{,}4$	L_{Ba}^{Ju}	-0^g0009	$-1{,}1$	L_{Pu}^{Ba}	0^g0067	$2{,}1$
L_{Pu}^{Bo}	-0^g0005	$-0{,}3$	L_{Pu}^{Ou}	-0^g0015	$-0{,}8$	L_{Pu}^{Le}	-0^g0004	$-0{,}3$
L_{Pu}^{Be}	-0^g0014	$-0{,}9$	L_{Pu}^{Bu}	-0^g0004	$-0{,}4$	L_{Pu}^{Fe}	0^g0000	$0{,}0$

	L	L′		L	L′		L	L′
L_{Pu}^{Ju}	-0^g0004	−0,4	L_{Bo}^{Ba}	-0^g0002	−0,1	L_{Bo}^{Pu}	0^g0012	0,7
L_{Bo}^{Ou}	0^g0013	1,2	L_{Bo}^{Le}	-0^g0008	−0,5	L_{Bo}^{Be}	-0^g0020	−0,8
L_{Bo}^{Bu}	0^g0001	0,1	L_{Bo}^{Fe}	-0^g0012	−1,1	L_{Ou}^{Ba}	-0^g0018	−1,4
L_{Ou}^{Pu}	-0^g0006	−0,3	L_{Ou}^{Bo}	0^g0023	2,1	L_{Ou}^{Le}	0^g0007	0,4
L_{Le}^{Ba}	-0^g0009	−0,7	L_{Le}^{Pu}	-0^g0004	−0,3	L_{Le}^{Bo}	-0^g0002	−0,2
L_{Le}^{Ou}	0^g0001	0,1	L_{Le}^{Be}	0^g0064	2,1	L_{Le}^{Bu}	0^g0020	1,1
L_{Le}^{Fe}	0^g0027	1,0	L_{Le}^{Ju}	-0^g0014	−0,9	L_{Be}^{Ba}	-0^g0028	−1,8
L_{Be}^{Pu}	0^g0001	0,1	L_{Be}^{Bo}	0^g0035	1,3	L_{Be}^{Le}	-0^g0011	−0,4
L_{Bu}^{Ba}	-0^g0002	−0,2	L_{Bu}^{Pu}	0^g0001	0,1	L_{Bu}^{Bo}	-0^g0011	−1,1
L_{Bu}^{Ou}	0^g0026	1,3	L_{Bu}^{Le}	0^g0024	1,4	L_{Bu}^{Fe}	0^g0003	0,1
L_{Bu}^{Ju}	-0^g0038	−1,8	L_{Fe}^{Ba}	0^g0004	0,4	L_{Fe}^{Pu}	0^g0003	0,3
L_{Fe}^{Bo}	-0^g0008	−0,8	L_{Fe}^{Ou}	0^g0011	0,7	L_{Fe}^{Le}	-0^g0022	−0,8
L_{Fe}^{Bu}	0^g0014	0,4	L_{Fe}^{Ju}	0^g0002	0,1	L_{Ju}^{Ba}	0^g0006	0,7
L_{Ju}^{Pu}	0^g0009	1,0	L_{Ju}^{Ou}	0^g0002	0,2	L_{Ju}^{Le}	0^g0010	0,7
L_{Ju}^{Bu}	0^g0036	1,7	L_{Ju}^{Fe}	0^g0034	1,3			

	L (m)	L′		L (m)	L′		L (m)	L′
S_{Ba}^{Pu}	−0,006	−0,6	S_{Ba}^{Bo}	0,011	1,1	S_{Ba}^{Ou}	0,012	1,1
S_{Ba}^{Le}	−0,024	−2,3	S_{Ba}^{Be}	−0,013	−1,2	S_{Ba}^{Bu}	0,017	1,5
S_{Ba}^{Fe}	−0,004	−0,4	S_{Ba}^{Ju}	−0,009	−0,7	S_{Pu}^{Bo}	0,006	0,6
S_{Pu}^{Ou}	0,019	1,9	S_{Pu}^{Le}	−0,003	−0,3	S_{Pu}^{Be}	−0,013	−1,3
S_{Pu}^{Bu}	0,014	1,2	S_{Pu}^{Fe}	0,017	1,6	S_{Pu}^{Ju}	0,004	0,3
S_{Bo}^{Ou}	−0,005	−0,5	S_{Bo}^{Le}	−0,009	−0,9	S_{Bo}^{Be}	0,022	2,2
S_{Bo}^{Bu}	0,033	2,8	S_{Bo}^{Fe}	−0,017	−1,5	S_{Ou}^{Le}	0,004	0,3
S_{Ou}^{Bu}	0,007	0,6	S_{Ou}^{Fe}	0,010	0,9	S_{Ou}^{Ju}	0,011	1,0
S_{Le}^{Be}	−0,013	−1,3	S_{Le}^{Bu}	0,012	1,2	S_{Le}^{Fe}	0,013	1,3
S_{Le}^{Ju}	0,008	0,8	S_{Bu}^{Fe}	0,017	1,7	S_{Bu}^{Ju}	−0,004	−0,4
S_{Fe}^{Ju}	0,010	1,0						



	L (m)	L′
X_{Ba}	−0,012	−1,0
Y_{Ba}	−0,011	−0,9
X_{Ou}	−0,005	−0,4
Y_{Ou}	−0,007	−0,6
X_{Ju}	0,013	1,1
Y_{Ju}	0,006	0,5

Empleando las matrices del apartado anterior obtenemos los vectores $A'^{\mathsf{T}}L'$ y $X_\Delta = N^{-1}A'^{\mathsf{T}}L'$. Este último y los valores ajustados son

	Δx	x (m)
X_{Ba}	0,000	6647,786
Y_{Ba}	−0,011	507,466
X_{Pu}	0,004	6424,278
Y_{Pu}	−0,005	321,637
X_{Bo}	0,013	6487,341
Y_{Bo}	−0,008	823,587
X_{Ou}	−0,006	5982,532
Y_{Ou}	−0,009	68,524
X_{Le}	0,014	5913,814
Y_{Le}	0,000	645,995

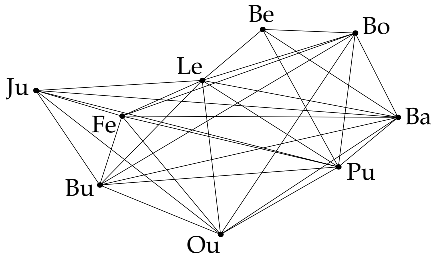
	Δx	x (m)
X_{Be}	0,005	6139,894
Y_{Be}	−0,017	837,148
X_{Bu}	−0,012	5529,480
Y_{Bu}	0,004	253,764
X_{Fe}	0,004	5613,059
Y_{Fe}	0,005	512,174
X_{Ju}	0,002	5290,096
Y_{Ju}	0,008	608,210

	Δx (rad)	Δx	x
Σ_{Ba}	$22 \cdot 10^{-6}$	0^g0014	365^g2412
Σ_{Pu}	$15 \cdot 10^{-6}$	0^g0009	135^g9888
Σ_{Bo}	$17 \cdot 10^{-6}$	0^g0011	32^g2779
Σ_{Ou}	$9 \cdot 10^{-6}$	0^g0006	289^g2832
Σ_{Le}	$20 \cdot 10^{-6}$	0^g0013	337^g9048
Σ_{Be}	$4 \cdot 10^{-6}$	0^g0003	246^g4457
Σ_{Bu}	$23 \cdot 10^{-6}$	0^g0014	40^g2593
Σ_{Fe}	$17 \cdot 10^{-6}$	0^g0011	273^g0258
Σ_{Ju}	$0 \cdot 10^{-6}$	0^g0000	269^g1649

Los residuos en esta ocasión son

	v'	v		v'	v		v'	v
L_{Ba}^{Pu}	$-0{,}5$	-0^g0017	L_{Ba}^{Bo}	$0{,}6$	0^g0016	L_{Ba}^{Ou}	$0{,}2$	0^g0003
L_{Ba}^{Le}	$1{,}1$	0^g0015	L_{Ba}^{Be}	$-0{,}3$	-0^g0005	L_{Ba}^{Bu}	$-0{,}3$	-0^g0003
L_{Ba}^{Fe}	$0{,}0$	0^g0000	L_{Ba}^{Ju}	$-0{,}5$	-0^g0004	L_{Pu}^{Ba}	$2{,}4$	0^g0074
L_{Pu}^{Bo}	$-0{,}4$	-0^g0007	L_{Pu}^{Ou}	$-0{,}4$	-0^g0008	L_{Pu}^{Le}	$-0{,}3$	-0^g0005
L_{Pu}^{Be}	$0{,}1$	0^g0001	L_{Pu}^{Bu}	$-0{,}2$	-0^g0002	L_{Pu}^{Fe}	$0{,}1$	0^g0001
L_{Pu}^{Ju}	$-0{,}1$	-0^g0001	L_{Bo}^{Ba}	$-0{,}5$	-0^g0014	L_{Bo}^{Pu}	$0{,}6$	0^g0012
L_{Bo}^{Ou}	$1{,}2$	0^g0014	L_{Bo}^{Le}	$-0{,}3$	-0^g0005	L_{Bo}^{Be}	$0{,}3$	0^g0007
L_{Bo}^{Bu}	$-0{,}1$	-0^g0001	L_{Bo}^{Fe}	$-1{,}1$	-0^g0012	L_{Ou}^{Ba}	$-1{,}3$	-0^g0015
L_{Ou}^{Pu}	$-0{,}1$	-0^g0002	L_{Ou}^{Bo}	$1{,}7$	0^g0018	L_{Ou}^{Le}	$-0{,}7$	-0^g0011
L_{Ou}^{Bu}	$0{,}6$	0^g0011	L_{Ou}^{Fe}	$-1{,}0$	-0^g0016	L_{Ou}^{Ju}	$0{,}3$	0^g0004
L_{Le}^{Ba}	$-0{,}6$	-0^g0008	L_{Le}^{Pu}	$-0{,}1$	-0^g0002	L_{Le}^{Bo}	$0{,}2$	0^g0003
L_{Le}^{Ou}	$-0{,}6$	-0^g0009	L_{Le}^{Be}	$2{,}0$	0^g0063	L_{Le}^{Bu}	$0{,}4$	0^g0007
L_{Le}^{Fe}	$0{,}8$	0^g0022	L_{Le}^{Ju}	$-0{,}6$	-0^g0010	L_{Be}^{Ba}	$-1{,}4$	-0^g0023
L_{Be}^{Pu}	$0{,}6$	0^g0010	L_{Be}^{Bo}	$2{,}1$	0^g0054	L_{Be}^{Le}	$-0{,}7$	-0^g0022
L_{Bu}^{Ba}	$0{,}3$	0^g0003	L_{Bu}^{Pu}	$0{,}7$	0^g0008	L_{Bu}^{Bo}	$-1{,}0$	-0^g0010
L_{Bu}^{Ou}	$1{,}4$	0^g0026	L_{Bu}^{Le}	$0{,}8$	0^g0014	L_{Bu}^{Fe}	$-0{,}5$	-0^g0017
L_{Bu}^{Ju}	$-2{,}0$	-0^g0043	L_{Fe}^{Ba}	$0{,}5$	0^g0005	L_{Fe}^{Pu}	$0{,}5$	0^g0006
L_{Fe}^{Bo}	$-0{,}8$	-0^g0008	L_{Fe}^{Ou}	$0{,}2$	0^g0003	L_{Fe}^{Le}	$-1{,}0$	-0^g0029
L_{Fe}^{Bu}	$-0{,}3$	-0^g0010	L_{Fe}^{Ju}	$0{,}4$	0^g0010	L_{Ju}^{Ba}	$-0{,}3$	-0^g0002
L_{Ju}^{Pu}	$0{,}3$	0^g0003	L_{Ju}^{Ou}	$-1{,}0$	-0^g0011	L_{Ju}^{Le}	$0{,}1$	0^g0002
L_{Ju}^{Bu}	$0{,}8$	0^g0017	L_{Ju}^{Fe}	$1{,}2$	0^g0031			

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
S_{Ba}^{Pu}	$0{,}0$	$0{,}000$	S_{Ba}^{Bo}	$1{,}5$	$0{,}015$	S_{Ba}^{Ou}	$0{,}7$	$0{,}007$
S_{Ba}^{Le}	$-1{,}1$	$-0{,}012$	S_{Ba}^{Be}	$-0{,}5$	$-0{,}005$	S_{Ba}^{Bu}	$0{,}8$	$0{,}009$
S_{Ba}^{Fe}	$-0{,}1$	$-0{,}001$	S_{Ba}^{Ju}	$-0{,}7$	$-0{,}009$	S_{Pu}^{Bo}	$0{,}7$	$0{,}008$



	v'	v (m)
S_{Pu}^{Ou}	0,8	0,008
S_{Pu}^{Le}	0,2	0,002
S_{Pu}^{Be}	−0,3	−0,003
S_{Pu}^{Bu}	−0,1	−0,001
S_{Pu}^{Fe}	1,3	0,015
S_{Pu}^{Ju}	−0,1	−0,002
S_{Bo}^{Ou}	−1,5	−0,017

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
S_{Bo}^{Le}	−0,5	−0,006	S_{Bo}^{Be}	1,4	0,014	S_{Bo}^{Bu}	1,6	0,018
S_{Bo}^{Fe}	−1,9	−0,021	S_{Ou}^{Le}	−0,3	−0,003	S_{Ou}^{Bu}	−0,4	−0,004
S_{Ou}^{Fe}	0,5	0,005	S_{Ou}^{Ju}	0,6	0,007	S_{Le}^{Be}	0,5	0,005
S_{Le}^{Bu}	−0,3	−0,003	S_{Le}^{Fe}	0,6	0,006	S_{Le}^{Ju}	−0,4	−0,004
S_{Bu}^{Fe}	1,1	0,011	S_{Bu}^{Ju}	0,1	0,001	S_{Fe}^{Ju}	0,7	0,007

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
X_{Ba}	−1,0	−0,012	Y_{Ba}	−0,1	−0,001	X_{Ou}	0,1	0,001
Y_{Ou}	0,2	0,002	X_{Ju}	0,9	0,011	Y_{Ju}	−0,2	−0,002

□

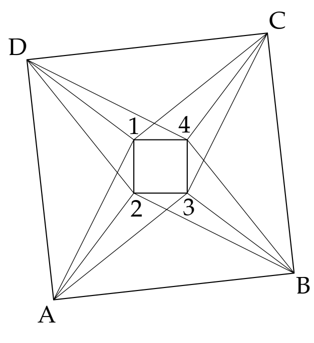
La máxima diferencia entre esta solcuión y la anterior en una coordenada es de 0,020 m, en concreto en Y_{Be}, y de 0^g0007 en las desorientaciones, diferencia que con uno u otro signo se da entre varias.

Salta a la vista el hecho de que las diferencias en Y de esta solución respecto a la anterior son todas negativas. La fijación de la figura en posición viene dada exclusivamente por las observaciones directas de coordeadas. En el segundo conjunto de observaciones las coordenadas Y son las tres al menos 6 mm menores que sus respectivas del primero, lo que da lugar a la diferencia en los valores ajustados. Una diferencia constante indicaría un desplazamiento. Si queremos ver cuánto ha variado la figura en forma hay que atender a la «diferencia de diferencias». Ahora la variación en las coordenadas Y es menor, de 16 mm, mientras que en X es de 21 mm, bastante mayor que la mayor diferencia absoluta.

Análogamente, una diferencia constante en las desorientaciones indicaría un giro (lo que también se puede ver a partir de las coordenadas). Parece que en esta ocasión las discrepancias en los conjuntos de observaciones directas no inducen ningún giro.

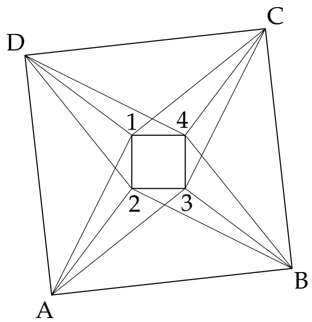
Estos giros y desplazamientos muestran el hecho de que en una estimación se obtienen unos valores que no coinciden con los reales, y si un conjunto de magnitudes se observa más de una vez los valores ajustados de ellas obtenidos serán distintos y, especialmente si el número de redundancias es pequeño, podrán aparecer aparentes discrepancias sistemáticas que en realidad no lo son. En este ejercicio la redundancia de la figura en cuanto que independiente de su posición en un sistema de coordenadas absoluto; esto es, en cuanto a figura como tal, es elevado, pero en lo que respecta a su posicionamiento, con sólo tres puntos medidos, es muy bajo. Habiendo sólo tres coordenadas Y no es extraño que las tres segundas observaciones sean menores, o las tres mayores, que las primeras, y de no serlo las Y podrían haberlo sidos las X, o el giro (p. ej., respecto a su centro de gravedad). Sirva este análisis para incidir en que cuando hay poca redundancia no se deben buscar interpretaciones a los residuos y, en general, no olvidar nunca que el azar puede ser caprichoso.

9. Cuadrado pequeño



La figura adjunta, que no está a escala, muestra el siguiente trabajo: con el objetivo de obtener coordenadas de las esquinas del cuadrilátero interior $1, 2, 3, 4$, en donde no se puede estacionar, se plantea un cuadrilátero exterior auxiliar que es observado y desde el cual se observa a los puntos interiores. Las medidas de distancia, promediadas ya las recíprocas (es decir, que había por ejemplo distancias medidas de A a B y de B a A, y el valor que a continuación se muestra como distancia de A a B es la media de ambas) son:

$$S_A^B = 18{,}128, \qquad S_A^C = 25{,}8555, \qquad S_A^D = 18{,}197,$$
$$S_B^C = 18{,}417, \qquad S_B^D = 25{,}799, \qquad S_C^D = 18{,}311.$$



La precisión de las medidas originales es $\sigma_S^2 = 0{,}003^2 + (8 \cdot 10^{-6}S)^2$ (m).

Las lecturas angulares son

$$\begin{aligned}
L_A^B &= 93^g 7764, & L_A^C &= 43^g 3041,\\
L_A^D &= 393^g 2093, & L_A^1 &= 36^g 1796,\\
L_A^2 &= 42^g 1603, & L_A^3 &= 50^g 2904,\\
L_B^A &= 216^g 9654, & L_B^C &= 317^g 0301,\\
L_B^D &= 266^g 8003, & L_B^2 &= 259^g 1981,\\
L_B^3 &= 264^g 9781, & L_B^4 &= 272^g 9414,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_C^A &= 205^g 1953, & L_C^B &= 155^g 7320, & L_C^D &= 254^g 8936,\\
L_C^1 &= 212^g 1674, & L_C^3 &= 198^g 7054, & L_C^4 &= 204^g 4636,\\
L_D^A &= 246^g 8207, & L_D^B &= 197^g 2215, & L_D^C &= 146^g 6131,\\
L_D^1 &= 197^g 2531, & L_D^3 &= 198^g 6961, & L_D^4 &= 191^g 1906;
\end{aligned}$$

con una precisión tal que hay una probabilidad del 96 % de que el error sea menor que $0^g 0006$.

Obtener unas coordenadas ajustadas para los puntos 1, 2, 3, 4 en un sistema arbitrario.

➡ En las precisiones de las medidas longitudinales la componente proporcional a la distancia es totalmente despreciable. Para una distancia de 26 m da lugar a un valor $\sigma_S = 3{,}01$ mm. De modo que despreciaremos esa componente y, para las distancias promedio, la precisión es $\sigma_S = 3/\sqrt{2} = 2{,}1$ mm.

Se podría estonces, en las distancias promedio, redondear al milímetro ignorando los medios milímetros. El error de redondeo es una distribución constante que tiene por varianza (cf. [p. 37]) $\sigma = 1/\sqrt{12}$ mm. Su composición con 2,1 mm da como resultado 2,1 mm. Es decir, que el redondeo no añade error apreciable. En general, aun cuando la desviación típica de unas observaciones es de sólo dos unidades, el error de redondeo es asumible y hasta despreciable. Incluso si σ es igual a una unidad, su composición con el redondeo da lugar a $\sigma = 1{,}05$, que no es un aumento significativo.

Dado que el enunciado proporciona los promedios de las distancias con medios milímetros (aunque sólo en una ocasión el redondeo haya sido al medio milímetro, pero esto es una cuestión de azar), mantendremos esos valores.

Para las observaciones de lectura, la indicación sobre su precisión viene a decir que $2\sigma_L = 0^g 0006$, de donde $\sigma_L = 0^g 0003$.

Hay que escoger los parámetros fijos. Han de ser tres: bien dos coordenadas y una desorientación o bien tres coordenadas.

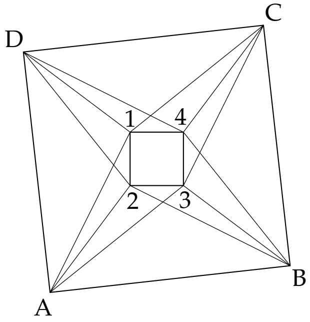
Es una costumbre muy extendia tomar las coordenadas y desorientación de un punto. Se suele proceder de esta manera porque se piensa que así se pueden ir calculando los valores aproximados fácilmente comenzando en ese punto. Esto es una verdad a medias, pues si bien es cierto que sí se pueden ir calculando los valores aproximados a partir de ese punto, nada impide hacerlo también aunque las coordenadas que se eligan como fijas sean otras. En el momento de elegir los parámetros que se tomarán como fijos no es necesario elegir su valor, sino que se pude hacer a posteriori:

Los valores aproximados se calculan de cualquier *manera, y una vez calculados se escogen como fijos los que se desee.*

Para poner de manifiesto este principio elegiremos como fijos las coordenadas del punto 1 y la desorientación en C. Podemos empezar a calcular a partir de A, por ejemplo. Le daremos coordenadas $(10, 10)$. Para que la orientación de la figura coincida aproximadamente con la representada en el dibujo tomaremos, basándonos en el gráfico y en las lecturas desde A, $\Sigma_A = 0^g 00$ (otra vez, una casualidad). Teniendo desorientación en A podemos radiar los puntos B, C y D, y con las lecturas desde estos a A calcular desorientación en ellos. Una vez que se tiene coordenadas y desorientación de todos los puntos exteriores se calculan coordenadas de los puntos interiores por intersección directa. Conviene no tomar puntos diagonalmente opuestos para la intersección directa, pues el ángulo de intersección es pequeño y el error en el punto calculado puede ser importante; por ejemplo, no calcular las coordenadas de 1 por intersección a partir de A y C. De todos modos hay que tener siempre presente que lo que estamos calculando son valores aproximados, y unos valores de baja calidad en el peor de los casos supondrán la necesidad de llevar a cabo más iteraciones, y normalmente sólo una más.

Los valores que se obtienen (depende de cómo se hayan tomado las intersecciones directas) son, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\Sigma_A &= 0^g 0000, & X_A &= 10{,}000, & Y_A &= 10{,}000,\\
\Sigma_B &= 76^g 8110, & X_B &= 28{,}041, & Y_B &= 11{,}769,\\
\Sigma_C &= 38^g 1088, & X_C &= 26{,}262, & Y_C &= 30{,}101,
\end{aligned}$$



$$\Sigma_D = 346^g 3886,$$

$X_D = 8{,}063,$ $\quad Y_D = 28{,}094,$

$X_1 = 16{,}926,$ $\quad Y_1 = 20{,}845,$

$X_2 = 16{,}896,$ $\quad Y_2 = 18{,}845,$

$X_3 = 18{,}896,$ $\quad Y_3 = 18{,}815,$

$X_4 = 18{,}925,$ $\quad Y_4 = 20{,}816.$

De estos se tomarán X_1, Y_1 y Σ_C como fijos, definitorios del sistema de coordenadas, y los demás como valores aproximados.

Los valores aproximados de las magnitudes medidas y los valores L son

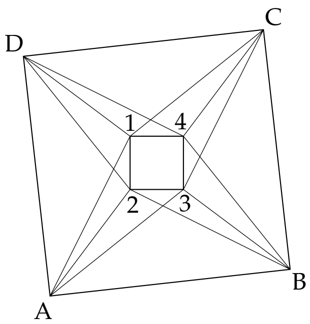
	Obs.	Apr.	L	L (rad)
L_A^B	$93^g 7764$	$93^g 7764$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_A^C	$43^g 3041$	$43^g 3041$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_A^D	$393^g 2093$	$393^g 2093$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_A^1	$36^g 1796$	$36^g 1801$	$-0^g 0005$	$-8 \cdot 10^{-6}$
L_A^2	$42^g 1603$	$42^g 1603$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_A^3	$50^g 2904$	$50^g 2904$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_B^A	$216^g 9654$	$216^g 9654$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_B^C	$317^g 0301$	$317^g 0292$	$0^g 0009$	$14 \cdot 10^{-6}$
L_B^D	$266^g 8003$	$266^g 8017$	$-0^g 0014$	$-22 \cdot 10^{-6}$
L_B^2	$259^g 1981$	$259^g 1981$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_B^3	$264^g 9781$	$264^g 9781$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_B^4	$272^g 9414$	$272^g 9446$	$-0^g 0032$	$-50 \cdot 10^{-6}$
L_C^A	$205^g 1953$	$205^g 1953$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_C^B	$155^g 7320$	$155^g 7314$	$0^g 0006$	$9 \cdot 10^{-6}$
L_C^D	$254^g 8936$	$254^g 8976$	$-0^g 0040$	$-63 \cdot 10^{-6}$
L_C^1	$212^g 1674$	$212^g 1674$	$0^g 0000$	$0 \cdot 10^{-6}$
L_C^3	$198^g 7054$	$198^g 7051$	$0^g 0003$	$4 \cdot 10^{-6}$

	Obs.	Apr.	L	L (rad)
L_C^4	204^g4636	204^g4636	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_D^A	246^g8207	246^g8207	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_D^B	197^g2215	197^g2241	-0^g0026	$-41\cdot10^{-6}$
L_D^C	146^g6131	146^g6178	-0^g0047	$-74\cdot10^{-6}$
L_D^1	197^g2531	197^g2531	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$
L_D^2	205^g0700	205^g0736	-0^g0036	$-56\cdot10^{-6}$
L_D^4	191^g1906	191^g1906	0^g0000	$0\cdot10^{-6}$

	Obs.	Apr.	L (m)
S_A^B	18,128	18,128	0,000
S_A^C	25,856	25,856	0,000
S_A^D	18,197	18,197	0,000
S_B^C	18,417	18,418	−0,001
S_B^D	25,799	25,800	−0,001
S_C^D	18,311	18,310	0,001

Se calcula la matriz A como de costumbre. Pasamos de las matrices A y L a A′ y L′ dividiendo cada fila por su desviación típica: $0^g0003 = 5\cdot10^{-6}$ rad para las medidas angulares y 0,0021 m para las de distancia. El vector L es

	L	L′		L	L′		L	L′
L_A^B	0^g0000	0,0	L_A^C	0^g0000	0,0	L_A^D	0^g0000	0,0
L_A^1	-0^g0005	−1,8	L_A^2	0^g0000	0,0	L_A^3	0^g0000	0,0
L_B^A	0^g0000	0,0	L_B^C	0^g0009	3,0	L_B^D	-0^g0014	−4,7
L_B^2	0^g0000	0,0	L_B^3	0^g0000	0,0	L_B^4	-0^g0032	−10,7
L_C^A	0^g0000	0,0	L_C^B	0^g0006	2,0	L_C^D	-0^g0040	−13,4
L_C^1	0^g0000	0,0	L_C^3	0^g0003	1,0	L_C^4	0^g0000	0,0
L_D^A	0^g0000	0,0	L_D^B	-0^g0026	−7,7	L_D^C	-0^g0047	−13,8
L_D^1	0^g0000	0,0	L_D^2	-0^g0036	−10,5	L_D^4	0^g0000	0,0



	L (m)	L′
S_A^B	0,000	0,0
S_A^C	0,000	0,0
S_A^D	0,000	0,0
S_B^C	−0,001	−0,3
S_B^D	−0,001	−0,4
S_C^D	0,001	0,5

Una vez hechos los cálculos matriciales la diagonal principal de la matriz N^{-1} es

x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}	x	n^{-1}
X_A	$9 \cdot 10^{-8}$	Y_A	$20 \cdot 10^{-8}$	X_B	$21 \cdot 10^{-8}$	Y_B	$15 \cdot 10^{-8}$
X_C	$15 \cdot 10^{-8}$	Y_C	$15 \cdot 10^{-8}$	X_D	$14 \cdot 10^{-8}$	Y_D	$9 \cdot 10^{-8}$
X_2	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$	Y_2	$1{,}3 \cdot 10^{-8}$	X_3	$1{,}2 \cdot 10^{-8}$	Y_3	$1{,}3 \cdot 10^{-8}$
X_4	$1{,}3 \cdot 10^{-8}$	Y_4	$0{,}5 \cdot 10^{-8}$				

Los incrementos y valores ajustados son

	Δx	x (m)
X_A	0,0005	10,0005
Y_A	0,0005	10,0005
X_B	0,0006	28,0420
Y_B	0,0005	11,7699
X_B	0,0007	26,2629
Y_C	0,0008	30,1017
X_D	0,0007	8,0633
Y_D	−0,0004	28,0932

	Δx	x (m)
X_2	0,0005	16,8968
Y_2	0,0006	18,8451
X_3	0,0005	18,8963
Y_3	0,0005	18,8156
X_4	0,0001	18,9253
Y_4	−0,0001	20,8158

	Δx (rad)	Δx	x
Σ_A	$1 \cdot 10^{-6}$	0,0001	0^g0001
Σ_B	$-4 \cdot 10^{-6}$	−0,0003	76^g8107
Σ_D	$9 \cdot 10^{-6}$	0,0006	346^g3892

Así pues la solución pedida es

$$X_1 = 16{,}9260, \quad Y_1 = 20{,}8450, \quad X_2 = 16{,}8968, \quad Y_2 = 18{,}8451,$$
$$X_3 = 18{,}8963, \quad Y_3 = 18{,}8156, \quad X_4 = 18{,}9253, \quad Y_4 = 20{,}8158.$$

Los residuos son

	v'	v		v'	v		v'	v
L_A^B	0,7	$0^g 0002$	L_A^C	$-0{,}1$	$0^g 0000$	L_A^D	$-0{,}8$	$-0^g 0002$
L_A^1	0,4	$0^g 0001$	L_A^2	$-0{,}1$	$0^g 0000$	L_A^3	0,0	$0^g 0000$
L_B^A	$-0{,}6$	$-0^g 0002$	L_B^C	$-0{,}1$	$0^g 0000$	L_B^D	0,0	$0^g 0000$
L_B^2	$-0{,}6$	$-0^g 0002$	L_B^3	0,0	$0^g 0000$	L_B^4	1,3	$0^g 0004$
L_C^A	$-0{,}4$	$-0^g 0001$	L_C^B	$-0{,}2$	$-0^g 0001$	L_C^D	0,0	$0^g 0000$
L_C^1	0,4	$0^g 0001$	L_C^3	0,0	$0^g 0000$	L_C^4	0,2	$0^g 0001$
L_D^A	0,8	$0^g 0002$	L_D^B	$-1{,}1$	$-0^g 0003$	L_D^C	$-0{,}4$	$-0^g 0001$
L_D^1	0,1	$0^g 0000$	L_D^2	$-0{,}6$	$-0^g 0002$	L_D^4	1,3	$0^g 0004$

	v'	v (m)		v'	v (m)		v'	v (m)
S_A^B	$-0{,}1$	0,000	S_A^C	$-0{,}2$	0,000	S_A^D	0,4	0,001
S_B^C	$-0{,}4$	$-0{,}001$	S_B^D	$-0{,}1$	0,000	S_C^D	0,4	0,001

$\square$

El cálculo de regiones de confianza se llevará a cabo en el capítulo siguiente, pero analizando la geometría del problema el lector debería darse cuenta de que la precisión de los puntos del cuadrado pequeño será submilimétrica. No está tan claro sin embargo cómo será la de los puntos exteriores. Adelantamos que es submilimétrica también. Esto implica que la precisión de las distancias ajustadas, y con ella la de los residuos, será submilimétrica. Sin embargo, si en los valores obsevados son despreciables las décimas de milímetro, tampoco tiene sentido darlas en los residuos. Planteando un ejemplo exagerado, si en este trabajo se añade una medida de distancia muy basta entre dos de los puntos que intervienen, con precisión de medio metro, al tener las coordenadas ajustadas precisión submilimétrica también tendrá esa precisión el valor ajustado de la distancia medida, pero no tiene sentido dar esos decimales para su residuo.

10

† 1. Distribución normal multidimensional

a) Construir una distribución para un par de variables aleatorias de manera que cada una de ellas siga una distribución normal, su correlación sea cero y no sigan en conjunto una distribución normal bidimensional.

b) ¿Existen variabes aleatorias (x, y) de manera que $x \sim$ N, $y \sim$ N, x e y sean indpendientes y $(x, y) \not\sim$ N?

c) Demostrar que si un conjunto de variables sigue una distribución normal multidimensional entonces cualquier subconjunto de ellas sigue también una distribución normal multidimensional.

***a*)** Partiremos de una distibución normal bidimensional y la modificaremos de manera que no se alteren las distribuciones individuales de x e y.

Para ello recortamos una "porción" de la distribución y la colocamos en otro sitio. Sea f_0 la función de densidad de una distribución normal bidimensional. En el cuadrado $[x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + h]$ disminuimos f_0 en una cantidad constante, y esa probabilidad recortada la colocamos en $[x_0, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0]$. De esta manera la distribución de la variable x no se ha alterado, pero sí la de y. Si además recortamos una porción igual en $[x_0 - h, y_0 - h] \times [x_0, y_0]$ y la movemos a $[x_0 - h, y_0] \times [x_0, y_0 + h]$, tanto las distribución de x como la de y siguen siendo normales.

El proceso anterior da lugar a una correlación distinta de cero entre x e y. Si por ejemplo $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, se disminuye la probabilidad de los cuadrantes primero y tercero y se aumenta en el segundo y en el cuarto, lo que genera una correlación negativa. Invirtiendo los cuadrados en los que la probabilidad se aumenta y aquellos en los que se disminuye, la correlación generada será positiva. Aumentando el valor de h la correlación creada aumenta, al igual que al aumentar la altura (densidad) del prisma recortado. Entonces con un mayor valor de h y uno menor de altura se conseguirá una correlación igual.

Por lo tanto es posible combinar dos procesos de desplazamiento, sin que uno sea uno el opuesto del otro, de manera que la correlación resultante siga siendo cero.

b) Lo pedido en el apartado *b* es imposible. Si dos variables son independientes su distribución conjunta se puede escribir, por definición ([p. 16]), de manera $f(x,y) = f_x(x)f_y(y)$. La hipótesis es que $x \sim \mathrm{N}$ e $y \sim \mathrm{N}$, de donde $f(x,y)$ es una normal bidimensional.

c) Sea $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ el conjunto de variables que sabemos siguen una distribución normal multidimensional. Sean $\mathrm{X}_1 = (x_1, \ldots, x_r)$ y $\mathrm{X}_2 = (x_{r+1}, \ldots, x_n)$, de donde

$$\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1\ \mathrm{X}_2) = (x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n).$$

Se trata de demostrar que las variables X_1 siguen una distribución normal multidimensional.

La distribución de las X es (podemos suponer media cero)

$$\propto e^{\mathrm{X}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\mathrm{X}}. \tag{10.1.1}$$

La distribución de X_1, en caso de ser una normal ha de ser necesariamente

$$\propto e^{\mathrm{X}_1^\mathsf{T}\Sigma_{11}^{-1}\mathrm{X}_1}. \tag{10.1.2}$$

Esto lo emplearemos más adelante.

Se puede demostrar lo que pide el enunciado de diversas maneras. Existen otras más elegantes, pero la que presentamos a continuación es sencilla.

La función $f(x_1, \ldots, x_r)$ la obtenemos integrando (10.1.1) para unos valores concretos de las variables X_1. Las variables de integración son X_2. Sea $\mathrm{N} = \Sigma^{-1}$; así pues,

$$\Sigma^{-1} = \mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathrm{N}_{11} & \mathrm{N}_{12} \\ \mathrm{N}_{12}^\mathsf{T} & \mathrm{N}_{22} \end{pmatrix}.$$

Con esta notación

$$f(\mathrm{X}_1) \propto \int e^{-(\mathrm{X}_1^\mathsf{T}\mathrm{N}_{11}\mathrm{X}_1 + 2\mathrm{X}_1^\mathsf{T}\mathrm{N}_{12}\mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_2^\mathsf{T}\mathrm{N}_{22}\mathrm{X}_2)}\,\mathrm{d}\mathrm{X}_2.$$

En esta integral X_1 es constante, de donde

$$f(X_1) \propto e^{-(X_1^T N_{11} X_1)} \int e^{-(2X_1^T N_{12} X_2 + X_2^T N_{22} X_2)} \, dX_2.$$

Podemos realizar un giro en las variables X_2 de manera que las nuevas variables sigan distribuciones independientes, y esto no altera la distribución de las variables X_1. Es decir, podemos suponer que N_{22} es diagonal. No es posible extender esto a toda la matriz N. En ese caso estaríamos obteniendo las variables independientes Y tales que $Y = Q^T X$, o lo que es lo mismo $Y = QX$, siendo Q una matriz ortogonal. De esta manera estaríamos combinando las variables X_1 con las X_2, y no existe una correspondencia entre $(y_1, \ldots, y_r)$ y X_1 por una parte, e $(y_{r+1}, \ldots, y_n)$ y X_2 por otra. Sí que se cumple no obstante

$$X_1 = AY, \tag{10.1.3}$$

siendo A una matriz $r \times n$, lo que puede tomarse como origen para otra demostración.

Podemos además escalar cada variable X_2 de manera que la matriz N_{22} además de diagonal sea identidad. En ese caso el valor absoluto del exponente en el integrando es

$$\sum_{i=r+1}^{n} (2a_i x_i + x_i^2),$$

en donde los coeficientes a_i vienen del producto $X_1^T N_{12}$.

El anterior sumatorio lo podemos escribir como

$$\sum_{i=r+1}^{n} \left((x_i + a_i)^2 - a_i^2\right), \tag{10.1.4}$$

y la integral queda reducida al producto de integrales simples

$$\left(e^{+a_{r+1}^2} \int e^{-(x_{r+1}+a_{r+1})^2} dx_{r+1}\right) \cdots \left(e^{+a_n^2} \int e^{-(x_n+a_n)^2} dx_n\right).$$

La función que aparece dentro de cada integral es, salvo por una constante que es siempre la misma, una distribución normal unidimensional. Es decir, el valor de las integrales es siempre el mismo. Según esto la función $f(X_1)$ queda

$$f(X_1) \propto e^{-(X_1^T N_{11} X_1)} e^{\sum a_i^2}.$$

Los coeficientes a_i son los elementos del vector fila $X_1^T N_{12}$, de donde

$$\sum a_i^2 = X_1^T N_{12} (X_1^T N_{12})^T = X_1^T N_{12} N_{12}^T X_1.$$

Finalmente $f(X_1)$ es

$$f(X_1) \propto e^{-X_1^T (N_{11} - N_{12} N_{12}^T) X_1}. \tag{10.1.5}$$

□

Si no hubiésemos eliminado N_{22} la matriz que resultaría en el exponente es

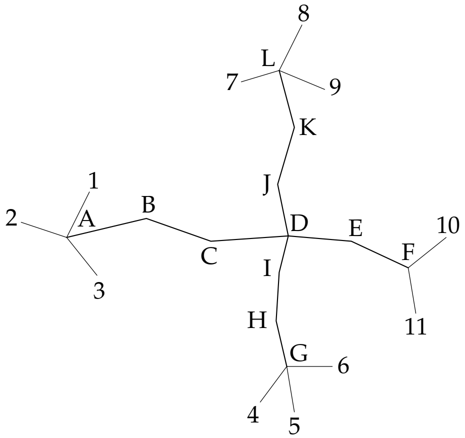
$$N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{12}^T,$$

que es la expresión general. Ahora bien, según (10.1.2) esta matriz es Σ_{11}^{-1}, o lo que es lo mismo $\Sigma_{11} = (N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{12}^T)^{-1}$; es decir,

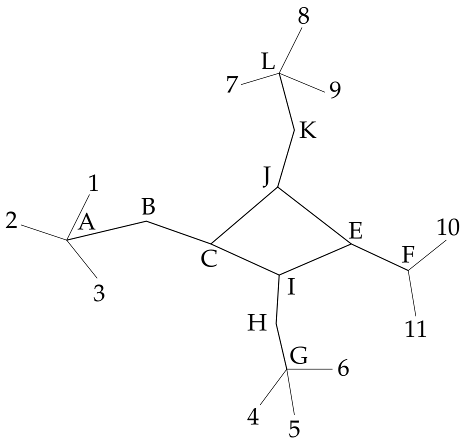
$$(N^{-1})_{11} = (N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21})^{-1}, \tag{10.1.6}$$

que es la expresión de la inversión de una matriz por bloques.

2. Poligonales concurrentes



a) Con los mismos datos que en el ejercicio del capítulo anterior, calcular las preciones de los valores calculados de todos los parámetros, a saber, las coordenadas de todos los puntos excepto A, F, G, L, y las desorientaciones de todas las estaciones.



b) Calcular cuáles serían las precisiones si la estación D se elimina y en su lugar se visan los puntos C, J, E, I como se indica en la figura.

a) Los valores pedidos se obtienen directamente de los elementos de la diagonal de N^{-1}, que ya están calculados. Como se dividió cada ecuación por su desviación típica no hay que aplicar ningún σ_0. Daremos valores de 2σ. Recordamos que los elementos $n^{-1}{}_{ii}$ son valores de σ^2. Además, los valores obtenidos para las desorientaciones estarán en radianes y será necesario pasarlos a grados. Por ejemplo, el valor que se muestra para Σ_1 se obtuvo como $200/\pi \cdot 2\sqrt{n^{-1}{}_{17,17}}$.

x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$
X_B	0,010	Y_B	0,007	X_C	0,011	Y_C	0,009
X_D	0,009	Y_D	0,008	X_E	0,009	Y_E	0,006
X_H	0,005	Y_H	0,010	X_I	0,008	Y_I	0,011
X_J	0,008	Y_J	0,011	X_K	0,006	Y_K	0,010
Σ_A	0^g0016	Σ_B	0^g0032	Σ_C	0^g0034	Σ_D	0^g0030
Σ_E	0^g0038	Σ_F	0^g0020	Σ_G	0^g0017	Σ_H	0^g0051
Σ_I	0^g0055	Σ_J	0^g0044	Σ_K	0^g0042	Σ_L	0^g0017

b) El enunciado no da los valores de las observaciones, y es que son necesarias para calcular las precisiones. Éstas vienen dadas por la matriz N, que depende de la matriz A que a su vez queda definida por los valores aproximados, y no son necesarios para nada los valores observados. Las ecuaciones de las nuevas observaciones se obtienen igual que cualquier otra, salvo porque el término L no se obtiene:

$$v_{\mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{J}}} = \mathrm{L} - \left(-0{,}0040\Delta X_{\mathrm{E}} - 0{,}0052\Delta Y_{\mathrm{E}} + 0{,}0040\Delta X_{\mathrm{J}} + 0{,}0052\Delta Y_{\mathrm{J}}\right),$$
$$v_{\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{J}}} = \mathrm{L} - \left(0{,}79\Delta X_{\mathrm{E}} - 0{,}61\Delta Y_{\mathrm{E}} - 0{,}79\Delta X_{\mathrm{J}} + 0{,}61\Delta Y_{\mathrm{J}}\right),$$
$$\ldots$$

Las distancias de las nuevas visuales, necesarias para calcular los valores de σ, son

$$\mathrm{S}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{J}} = 142{,}298, \quad \mathrm{S}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{E}} = 150{,}905, \quad \mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{I}} = 127{,}348, \quad \mathrm{S}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{J}} = 121{,}712.$$

Los valores de σ para las nuevas observaciones son los siguientes. Para las lecturas angulares están expresados en radianes:

L	σ_{L}	L	σ_{L}	L	σ_{L}	L	σ_{L}
$\mathrm{L}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{J}}$	$28 \cdot 10^{-6}$	$\mathrm{L}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{J}}$	$25 \cdot 10^{-6}$	$\mathrm{L}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{E}}$	$24 \cdot 10^{-6}$	$\mathrm{L}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}$	$25 \cdot 10^{-6}$
$\mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{J}}$	$24 \cdot 10^{-6}$	$\mathrm{L}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{I}}$	$27 \cdot 10^{-6}$	$\mathrm{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{E}}$	$27 \cdot 10^{-6}$	$\mathrm{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}$	$28 \cdot 10^{-6}$
$\mathrm{S}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{J}}$	0,0062	$\mathrm{S}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{E}}$	0,0063	$\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{I}}$	0,0062	$\mathrm{S}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}$	0,0062

Se obtiene la matriz A pesada, la matriz N y su inversa. Se toman los elementos de su diagonal y se calcula $2\sqrt{n_{ii}^{-1}}$. Además, al igual que antes, para pasar los valores de precisión de las desorientaciones a grados se multiplican por $200/\pi$. Se obtienen los siguientes valores:

x	$2\sigma_{\mathrm{x}}$	x	$2\sigma_{\mathrm{x}}$	x	$2\sigma_{\mathrm{x}}$	x	$2\sigma_{\mathrm{x}}$
X_{B}	0,009	Y_{B}	0,007	X_{C}	0,009	Y_{C}	0,008
X_{E}	0,008	Y_{E}	0,006	X_{H}	0,005	Y_{H}	0,009
X_{I}	0,007	Y_{I}	0,008	X_{J}	0,007	Y_{J}	0,008
X_{K}	0,005	Y_{K}	0,009				
Σ_{A}	$0^{g}0016$	Σ_{B}	$0^{g}0031$	Σ_{C}	$0^{g}0028$	Σ_{E}	$0^{g}0027$
Σ_{F}	$0^{g}0020$	Σ_{G}	$0^{g}0017$	Σ_{H}	$0^{g}0049$	Σ_{I}	$0^{g}0031$
Σ_{J}	$0^{g}0025$	Σ_{K}	$0^{g}0040$	Σ_{L}	$0^{g}0017$		

□

Se puede ver que algunos valores han disminuido, en especial los de las desorientaciones de los cuatro puntos centrales. Pero más importante aún que esa disminución es el hecho de que se ha evitado una estación. Así, si queremos cruzar dos líneas y la estación central no es necesaria para nada más que la propia red, es mejor prescindir de esa estación y enlazar las cuatro adyacentes como se ha hecho en este ejercicio siempre que sea posible.

3. Línea altimétrica

Se lleva a cabo una nivelación geométrica desde un punto A de altura conocida igual a 100 m hasta un punto B. El error mayor en cada lectura es el de redondeo al milímetro. Desde A hasta B hay un total de 15 niveladas.

a) Obtener la precisión de la cota del punto B.

Se vuelve desde B hasta A por una camino que sigue aproximadamente la línea de ida, y se obtiene un error de cierre de 4 mm.

b) ¿Es el error de cierre aceptable?
c) El error de cierre se repate por igual entre todos los tramos de nivelación. Obtener la nueva precisión de B.

Supongamos que en la zona en que se encuentra el punto B hay otro punto C, de modo que para dar cota a la zona de trabajo se emplearán los puntos B y C. El punto C también forma parte de la línea de nivelación y se encuentra 3 niveladas antes que B según se vino desde A.

d) Obtener la precisión del punto C suponiendo que en la línea de vuelta no se pasó por C.
e) Obtener la precisión del punto C suponiendo que en la línea de vuelta se pasó otra vez por C.
f) Obtener la precisión del desnivel entre B y C en ambos casos.

a) La desviación típica de un error de redondeo es $\sigma = 1/\sqrt{12}$. Cada nivelada consta de dos observaciones, de modo que la precisión de la cota de B es $\sigma_\mathrm{B} = \sqrt{30}/\sqrt{12} = 1{,}6$ mm.

b) El error acumulado en la ida y en la vuelta se ajusta a una desviación $\sigma = \sqrt{60}/\sqrt{12} = 2{,}2$ mm, por lo que un error de 4 mm es aceptable.

***c*)** Interpretar una línea de nivelación como de ida o de vuelta es algo puramente convencional, así que podemos pensar que lo que tenemos son dos líneas A-B que dan dos desniveles que se diferencian en 4 mm. Tenemos entonces dos desniveles con una diferencia tolerable y una precisión cada uno de 1,6 mm. La precisión del desnivel promedio es $1{,}2/\sqrt{2} = 1{,}1$ mm.

El desnivel promedio es lo que se obtendrá para B si se reparte el error de cierre entre todas las niveladas porque B se encuentra a la mitad del camino ida-vuelta, y en consecuencia las niveladas anteriores recibiran una corrección total de 2 mm y otro tanto las posteriores.

***d*)** Si la línea de vuelta no pasa por C lo que hay son dos líneas desde A, una de 12 niveladas y otra de 18; es decir, 24 y 36 observaciones respectivamente. Llamamos H_1 y H_2 a los desniveles obtenidos a través de una y otra línea. La precisión de cada uno de ellos es

$$\sigma_{H_1} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 1{,}4, \qquad \sigma_{H_2} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{12}} = 1{,}7.$$

Repartir el error por igual entre todas las niveladas es obviamente lo correcto, así que en lo que respecta a la cota que se obtenga para C tiene que ser lo mismo que promediar los dos desniveles A-C de acuerdo a sus precisiones. Usaremos esta interpretación para calcular la precisión de C. Llamamos H al desnivel A-C:

$$H = \frac{\frac{1}{24}H_1 + \frac{1}{36}H_2}{\frac{1}{24} + \frac{1}{36}} = 0{,}6H_1 + 0{,}4H_2$$

de donde la precisión de C es:

$$\sigma_C = \sqrt{0{,}6^2\sigma_{H_1}^2 + 0{,}4^2\sigma_{H_2}^2} = 1{,}1 \text{ mm}$$

□

En general, si se promedian dos cantidades pesándolas según sus precisiones, si la precisión de las cantidades es a y b, la precisión del promedio es $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

***e*)** Si a la vuelta se volvió a pasar por C lo único que interesa de ambas líneas son los tramos A – C. Los tramos C – B están colgados desde C y no aportan nada a la precisión de C. La precisión de C ahora es

$$\sigma_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 1{,}0\,\text{mm}.$$

La fracción de la derecha es la precisión de cada línea A – C.

***f*)** Si a la vuelta se pasó por C ahora lo que no aporta nada es el tramo A – C. Así pues la precisión del desnivel B – C es

$$\sigma_C^B = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = 0{,}5\,\text{mm}.$$

Si por el contrario no se pasó por C a la vuelta hay también dos desniveles B – C observados, uno por el camino directo y otro por el camino B – A – C. Como este último es tan largo su aportación a la precisión del tramo B – C es despreciable, así que la precisión del tramo B – C es

$$\sigma_C^B = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = 0{,}7\,\text{mm}.$$

$\square$

Vemos que la ganancia de precisión para C por el hecho de a la vuelta haber pasado también por él es muy pequeña. Lo que se ha hecho de cara a C es exactamente reemplazar una línea de 18 niveladas por una de 12. Si el punto estuviese más próximo a A la diferencia sería entonces mayor. Para un punto que estuviese muy cerca de A la ganancia en precisión sería un factor $\sqrt{2}$.

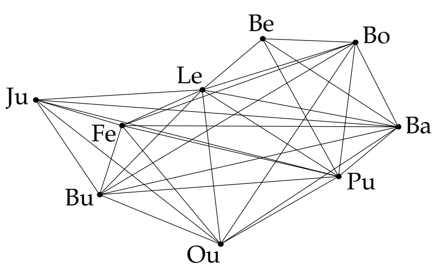
Sin embargo la ganancia en el desnivel C – B es grande. Para interpretar correctamente las precisiones hay que darse cuenta que la altura conocida de A no aporta nada a la precisión de los *desniveles*, sino que simplemente sirve para situar todo el conjunto en altura. Al observar líneas de ida y vuelta lo que hay son círculos. Si la vuelta no tiene ningún punto en común con la ida hay un círculo que incluye los puntos A, B y C. Obsérvese que en lo que se refiere a observaciones de desniveles el punto A no se distingue de ninguno otro del círculo. Si por el contrario el punto C es común a la ida y la vuelta hay dos círculos completamente independientes en cuanto a desniveles: A – C y C – B.

En un círculo siempre hay dos valores observados para cada par de puntos del mismo, según se vaya de uno a otro por uno u otro arco. Si los dos puntos están muy próximos uno de los arcos será corto y el otro muy largo.

Las precisiones en la altura absoluta de cada punto no son más que las precisiones de sus desniveles respecto a A.

Cuando se lleva cota desde un punto a una zona hay que distinguir la precisión absoluta de las cotas transmitidas respecto al punto de referencia de las precisiones relativas de los puntos de la zona entre sí, que pueden depender poco de la precisión respecto al punto de referencia. En este ejempo no dependen nada, y pasar a la vuelta por C signficia medir dos veces el desnivel B – C frente a una sola. Por contra la precisión absoluta de C es la precisión del desnivel A – C, y pasar por C a la vuelta simplemente significa acortar el arco C – B – A al arco C – A, y no hay mucha diferencia. Se desarrolla este aspecto en el capítulo «cambio de los parámetros fijos».

4. Redes



Obener las elipses de error del 95 % de probabilidad para esta red.

a) Para el ajuste con lecturas angulares.
b) Para el ajuste con lecturas angulares y de distancia.

***a*)** Para obtener las elipses de error, que más correcto sería llamar elipses de precisión, no es suficiente los elementos de la diagonal de N^{-1} sino que necesitamos las submatrices 2×2 correspondientes a los pares (X, Y) de cada punto. Son las siguientes:

$$N_{Pu}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 85 & -5 \\ -5 & 40 \end{pmatrix}, \qquad N_{Bo}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 95 & -6 \\ -6 & 109 \end{pmatrix},$$

$$N_{Le}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 129 & 1 \\ 1 & 93 \end{pmatrix}, \qquad N_{Be}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 176 & -41 \\ -41 & 150 \end{pmatrix},$$

$$N_{Bu}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 129 & -51 \\ -51 & 177 \end{pmatrix}, \qquad N_{Fe}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 108 & -18 \\ -18 & 170 \end{pmatrix},$$

$$N_{Ju}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 191 & -111 \\ -111 & 462 \end{pmatrix}.$$

Los semiejes vienen dados por la fórmula [(10.8)] de la [p. 92], y la orientación del semieje mayor por [(10.10)] en la página siguiente. De ahora en adelante denotaremos siempre por a y b los semiejes mayor y menor respectivamente. Para Be se obtiene

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = 10^{-6} \times \frac{176+150 \pm \sqrt{26^2 - 4\cdot 41^2}}{2} = 10^{-6} \times \begin{cases} \frac{1}{2}(327+87) = 207, \\ \frac{1}{2}(327-87) = 120. \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{207-176}{-41} = -0{,}733,$$

Según esto los semiejes de la elipse del 95 % de probabilidad son

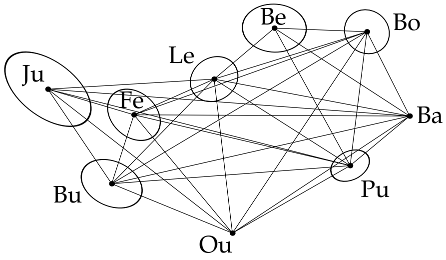
$$\begin{aligned} a &= 2{,}5\sqrt{\lambda_1} = 0{,}036\,\mathrm{m}, \\ b &= 2{,}5\sqrt{\lambda_2} = 0{,}027\,\mathrm{m}, \\ \theta &= -40^{g}. \end{aligned}$$

A continuación se muestran los valores para todos los puntos:

	a	b	θ	(m)
Pu	0,023	0,016	−7°	
Bo	0,026	0,024	−78°	
Le	0,028	0,024	2°	
Be	0,036	0,027	−40°	

	a	b	θ	(m)
Bu	0,036	0,025	−64°	
Fe	0,033	0,025	−83°	
Ju	0,056	0,031	−78°	

y las elipses dibujadas sobre cada punto. A la hora de representar las elipses sobre el gráfico de la red hay que tener en cuenta que el eje X sigue la dirección de la línea Ou – Ba:



b) Ahora las matrices son

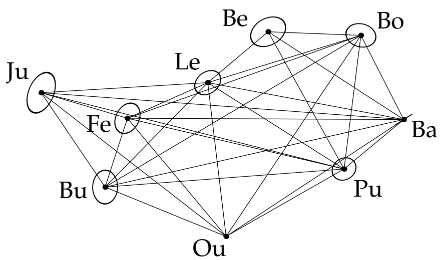
$$N_{\mathrm{Pu}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 32 & 1 \\ 1 & 22 \end{pmatrix}, \qquad N_{\mathrm{Bo}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 37 & -9 \\ -9 & 38 \end{pmatrix},$$
$$N_{\mathrm{Le}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 41 & 2 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}, \qquad N_{\mathrm{Be}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 68 & -1 \\ -1 & 35 \end{pmatrix},$$
$$N_{\mathrm{Bu}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 38 & 12 \\ 12 & 48 \end{pmatrix}, \qquad N_{\mathrm{Fe}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 47 & 12 \\ 12 & 33 \end{pmatrix},$$
$$N_{\mathrm{Ju}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 73 & 30 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}.$$

Además el punto Ba tiene una precisión en X dada por $\sigma_X^2 = 32 \cdot 10^{-6}$.
Se obtienen los siguientes valores:

	a	b	θ (m)
Pu	0,014	0,012	7°
Bo	0,017	0,013	−51°
Le	0,016	0,011	7°
Be	0,021	0,015	−2°

	a	b	θ (m)
Bu	0,019	0,014	62°
Fe	0,018	0,013	34°
Ju	0,024	0,014	38°

y las elipses dibujadas sobre cada punto:



En Ba se ha dibujado su segmento de error, que para el 95 % de probabilidad ha de ser igual a $\pm 2\sigma$. □

Las elipses son claramente más pequeñas con medidas de distancia. En el punto Ju se aprecia muy bien el efecto de medidas angulares y de distancia. Al estar un poco apartado las visuales proceden todas de un estrecho sector. Por ello las medidas angulares sólo lo definen bien en la dirección perpendicular a las visuales, como se puede apreciar en la primera elipse de error. Las medidas de distancia por el contrario lo hacen firme en la misma dirección que las visuales, y en la segunda elipse de error puede apreciase que ésta ha disminuido considerablemente en esa dirección pero apenas lo ha hecho en la perpendicular.

5. Simulación

Si bien no es posible observar una red veinte veces sí que se puede simular las observaciones en base a sus distribuciones supuestas y a unos valores reales supuestos. Tomando como valores reales los ajustados tras el cálculo con distancias y de acuerdo a las desviaciones típicas calculadas para cada observación, tanto de lectura como de distancia, generar veinte conjuntos de observaciones de ángulos y distancias y realizar el ajuste para cada uno de ellos. Para cada punto, representar las coordenadas obtenidas en cada ajuste junto con la elipse del 95 % de probabilidad centrada en el punto real.

➡ Para simular un conjunto de observaciones hay que generar para cada una de ellas un valor aleatorio siguiendo una distribución normal $(0, \sigma)$, para el σ de la observación, y sumarlo al valor real de la magnitud observada, que se obtiene a partir de los valorer reales de los parámetros, es decir, de las coordenadas y desorientaciones de los puntos que hemos tomado como reales. Pero esta suma en realidad no es necesaria para el ajuste, porque el vector de incrementos a las coordenadas que resulta del ajuste, que es los que nos interesa, se obtiene como $\mathrm{X}_\Delta = \mathrm{N}^{-1}\mathrm{A}'^\mathsf{T}\mathrm{L}'$, y si tomamos como valores aproximados los propios valores reales, lo que podemos hacer porque se trata de una simulación, L' es el valor observado menos el real, o sea el error, que es lo que es el valor aleatorio que habremos generado. Por último, como queremos representar los valores (X, Y) de cada ajuste en relación al valor real, tampoco es necesario sumar los incrementos X_Δ a los valores aproximados, porque en la simulación estos ya son los valores reales y entonces X_Δ es precisamente lo que queremos representar.

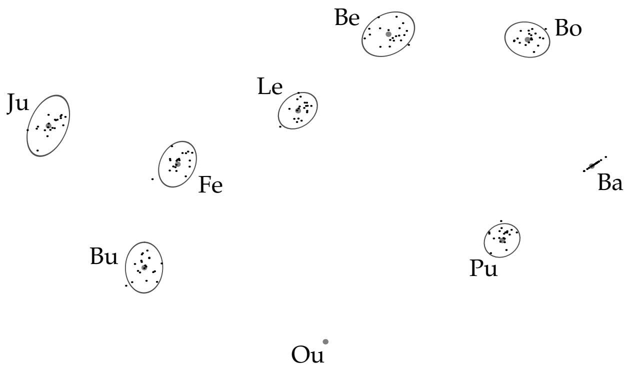
Así pues, hay que generar un conjunto de errores E de acuerdo al valor de σ de cada observación y calcular

$$\mathrm{X}_\Delta = \mathrm{N}^{-1}\mathrm{A}'^\mathsf{T}\mathrm{E}'.$$

La matriz $N^{-1}A'^{T}$ es siempre la misma, así que lo único que cambia en cada simulación es el vector E'.

La generación de cada valor de E se hará como sigue: se genera primero un valor aleatorio entre 0 y 1, para ese valor se toma $N^{-1}_{(0,1)}$ (aquí la N representa la distribución normal; no es ninguna matriz), con lo que se obtiene un valor siguiendo la distribución $N(0,1)$, y por último se multiplica por la σ de la observación en cuestión. Como para pasar de E a E' hay que dividir cada valor por su desviación típica, el valor de E' no es más que el valor aleatorio normal antes de multiplicar por σ. Vemos entonces que en una simulación se obtiene directamente E' y a partir de él, si se quiere, se puede obtener E y los valores observados.

Este es el resultado que obtuvo el autor:



□

Los puntos pequeños son las posiciones que se obtendrían para los puntos como resultado de distintos ajustes. En consecuencia los puntos que están fuera de la elipse del 95 % centrada en el punto real son puntos en los que a su vez la elipse centrada en ellos no incluye el punto real. Vemos que de un total de 140 puntos esto sucede en 8 ocasiones, esto es, un 5,7 %, lo que concuerda bien con el 4,5 % teórico.

11

1.

2.

12

1. **Matrices de rotación**
2. **Circunferencia, II**
3. **Coplanaridad**

13

1. Precisiones respecto a un punto

En el caso de la red con medias angulares únicamente, obtener las precisiones de los puntos:

a) Respecto a Ju.
b) Respecto a Le.
c) Respecto a Bo.

***a*)** La precisión de los puntos de la red respecto a Ju viene dada por

$$X_{\{Ju\}} = AX \quad \Rightarrow \quad \Sigma_{\{Ju\}} = A\Sigma_{xx}A^T.$$

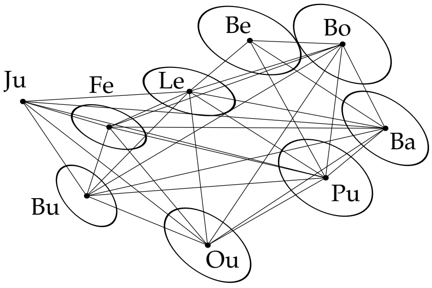
Σ_{xx} es la parte de la matriz N^{-1} correspondiente a las coordenadas (prescindiendo por tanto de las filas y columnas correpondientes a las desorientaciones). En la matriz A no hay que incluir las columnas de los parámetros X_{Ou}, Y_{Ou}, X_{Ba} e Y_{Ba}, que no aparecen en la matriz N^{-1}. La ecuación de transformación es

$$\begin{pmatrix} X_{Ba} \\ Y_{Ba} \\ X_{Pu} \\ Y_{Pu} \\ X_{Bo} \\ Y_{Bo} \\ X_{Ou} \\ Y_{Ou} \\ X_{Le} \\ Y_{Le} \\ X_{Be} \\ Y_{Be} \\ X_{Bu} \\ Y_{Bu} \\ X_{Fe} \\ Y_{Fe} \end{pmatrix}_{Ju} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cdot & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ & & \dots & & & & & \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{Pu} \\ Y_{Pu} \\ X_{Bo} \\ Y_{Bo} \\ X_{Le} \\ Y_{Le} \\ X_{Be} \\ Y_{Be} \\ X_{Bu} \\ Y_{Bu} \\ X_{Fe} \\ Y_{Fe} \\ X_{Ju} \\ Y_{Ju} \end{pmatrix}$$

Tras efectuar el producto $A\Sigma_{xx}A^T$ se obtienen las siguiente matrices para cada punto:

$$N_{Ba}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 191 & -111 \\ -111 & 462 \end{pmatrix}, \quad N_{Pu}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 266 & -123 \\ -123 & 475 \end{pmatrix},$$
$$N_{Bo}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 271 & -146 \\ -146 & 527 \end{pmatrix}, \quad N_{Ou}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 191 & -111 \\ -111 & 462 \end{pmatrix},$$
$$N_{Le}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 247 & -178 \\ -178 & 294 \end{pmatrix}, \quad N_{Be}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 305 & -193 \\ -193 & 467 \end{pmatrix},$$
$$N_{Bu}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 105 & -45 \\ -45 & 275 \end{pmatrix}, \quad N_{Fe}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 150 & -114 \\ -114 & 225 \end{pmatrix};$$

y las siguientes elipses:

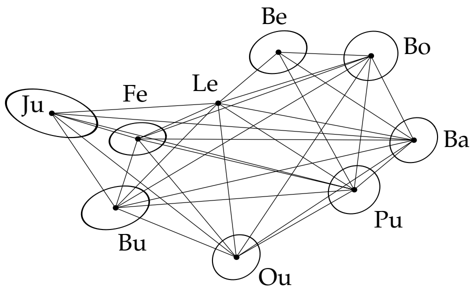


Recordamos que para representar las elipses hay que tener en cuenta que el eje X sigue la dirección de la línea Ou – Ba.

b) Para obtener las precisiones respecto a Le la matriz A ahora tiene -1's en las columnas correspondientes a X_{Le} e Y_{Le} como antes los tenía en las de Ju; las dos filas relativas a Le desaparecen y en su lugar aparecen las dos de Ju. Por lo demás todo es igual. Se obtienen las siguientes matrices y elipses:

$$N_{Ba}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 129 & 1 \\ 1 & 93 \end{pmatrix}, \quad N_{Pu}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 146 & -1 \\ -1 & 105 \end{pmatrix},$$
$$N_{Bo}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 153 & -6 \\ -6 & 116 \end{pmatrix}, \quad N_{Ou}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 129 & 1 \\ 1 & 93 \end{pmatrix},$$
$$N_{Be}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 173 & -23 \\ -23 & 91 \end{pmatrix}, \quad N_{Bu}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 225 & -43 \\ -43 & 96 \end{pmatrix},$$

$$N_{\mathrm{Fe}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 144 & -44 \\ -44 & 75 \end{pmatrix}, \quad N_{\mathrm{Ju}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 247 & -178 \\ -178 & 294 \end{pmatrix}.$$



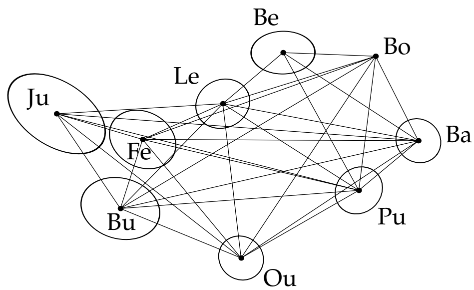
***c*)** Respecto a Bo los resultados son los siguientes:

$$N_{\mathrm{Ba}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 95 & -6 \\ -6 & 109 \end{pmatrix}, \qquad N_{\mathrm{Pu}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 123 & 4 \\ 4 & 104 \end{pmatrix},$$

$$N_{\mathrm{Ou}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 95 & -6 \\ -6 & 109 \end{pmatrix}, \qquad N_{\mathrm{Le}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 153 & -6 \\ -6 & 116 \end{pmatrix},$$

$$N_{\mathrm{Be}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 175 & -52 \\ -52 & 122 \end{pmatrix}, \quad N_{\mathrm{Bu}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 249 & -70 \\ -70 & 266 \end{pmatrix},$$

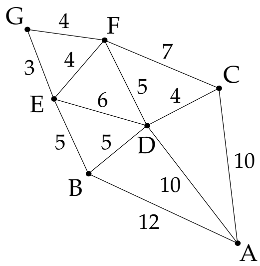
$$N_{\mathrm{Fe}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 178 & -39 \\ -39 & 226 \end{pmatrix}, \quad N_{\mathrm{Ju}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 271 & -146 \\ -146 & 527 \end{pmatrix}.$$



□

Obsérvese cómo la elipse de Le respecto a Ju es la misma que la de Ju respecto a Le. Esto lo podemos ver para cada pareja de entre los puntos Ba, Ou, Ju, Le y Bo. Obsérvese además como las elipses de Ou y Ba son siempre iguales.

2. Red altimétrica



La figura muestra una red de nivelación geométrica. Junto a cada línea se indica el número de niveladas de que consta. El error principal de cada nivelada es el de redondeo.

a) Obtener las precisiones de todos los puntos tomando como fijo el punto A.

b) A partir de la matriz de varianzas obtenida en el apartado anterior, calcular las precisiones de todos los puntos respecto al punto C.

c) Calcular la precisión del desnivel F – G.

***a*)** Se muestra la matriz A y a continuación A′. Esta última se obtiene dividiendo cada fila de A por la raíz cuadrada del número de niveladas de cada tramo. Es indistinto el sentido que se tome para cada tramo.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} Z_B & Z_C & Z_D & Z_E & Z_F & Z_G \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c}
Z_A^B \rightarrow \\ Z_A^C \rightarrow \\ Z_A^D \rightarrow \\ Z_D^B \rightarrow \\ Z_D^C \rightarrow \\ Z_D^E \rightarrow \\ Z_D^F \rightarrow \\ Z_B^E \rightarrow \\ Z_C^F \rightarrow \\ Z_E^F \rightarrow \\ Z_E^G \rightarrow \\ Z_F^G \rightarrow
\end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot \\
-1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1
\end{pmatrix},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} Z_B & Z_C & Z_D & Z_E & Z_F & Z_G \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c}
Z_A^B \rightarrow \\ Z_A^C \rightarrow \\ Z_A^D \rightarrow \\ Z_D^B \rightarrow \\ Z_D^C \rightarrow \\ Z_D^E \rightarrow \\ Z_D^F \rightarrow \\ Z_B^E \rightarrow \\ Z_C^F \rightarrow \\ Z_E^F \rightarrow \\ Z_E^G \rightarrow \\ Z_F^G \rightarrow
\end{array} &
\begin{pmatrix}
0{,}29 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 0{,}32 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0{,}32 & \cdot & \cdot & \cdot \\
0{,}45 & \cdot & 0{,}45 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 0{,}50 & -0{,}50 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -0{,}41 & 0{,}41 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -0{,}45 & \cdot & 0{,}45 & \cdot \\
-0{,}45 & \cdot & \cdot & 0{,}45 & \cdot & \cdot \\
\cdot & -0{,}38 & \cdot & \cdot & 0{,}38 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -0{,}50 & 0{,}50 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -0{,}58 & \cdot & 0{,}58 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}50 & 0{,}50
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

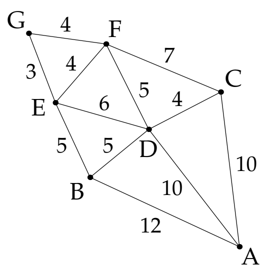
Se obtiene $N = A'^{T}A'$ y $\Sigma_{xx} = \sigma_0^2 N^{-1}$. En este caso σ_0 es la precisión de cada nivelada:

$$\sigma_0 = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{12}}, \qquad \sigma_0^2 = \frac{1}{6}.$$

$$
\Sigma_{xx} = \begin{pmatrix}
0{,}83 & 0{,}44 & 0{,}54 & 0{,}63 & 0{,}57 & 0{,}60 \\
0{,}44 & 0{,}77 & 0{,}53 & 0{,}53 & 0{,}58 & 0{,}55 \\
0{,}54 & 0{,}53 & 0{,}69 & 0{,}61 & 0{,}62 & 0{,}61 \\
0{,}63 & 0{,}53 & 0{,}61 & 0{,}91 & 0{,}76 & 0{,}84 \\
0{,}57 & 0{,}58 & 0{,}62 & 0{,}76 & 0{,}91 & 0{,}82 \\
0{,}60 & 0{,}55 & 0{,}61 & 0{,}84 & 0{,}82 & 1{,}12
\end{pmatrix}
$$

Las precisiones de los puntos son las raíces cuadradas de los elementos de la diagonal de esta matriz. Los valores son milímetros:

x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x
Z_B	0,91	Z_C	0,88	Z_D	0,83	Z_E	0,95	Z_F	0,95	Z_G	1,06



b) La matriz A de cambio de sistema es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} Z_B & Z_C & Z_D & Z_E & Z_F & Z_G \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} Z_A \rightarrow \\ Z_B \rightarrow \\ Z_D \rightarrow \\ Z_E \rightarrow \\ Z_F \rightarrow \\ Z_G \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La columna correspondiente a Z_A no está presente porque no existe en la matriz Σ_{xx}. El punto C no aparece entre las filas de A porque va a ser el nuevo punto fijo. La nueva matriz de precisiones es

$$\Sigma_C = A\Sigma_{xx}A^T = \begin{pmatrix} 0{,}77 & 0{,}34 & 0{,}24 & 0{,}24 & 0{,}20 & 0{,}22 \\ 0{,}34 & 0{,}73 & 0{,}35 & 0{,}44 & 0{,}33 & 0{,}39 \\ 0{,}24 & 0{,}35 & 0{,}41 & 0{,}33 & 0{,}29 & 0{,}31 \\ 0{,}24 & 0{,}44 & 0{,}33 & 0{,}62 & 0{,}42 & 0{,}54 \\ 0{,}20 & 0{,}33 & 0{,}29 & 0{,}42 & 0{,}53 & 0{,}47 \\ 0{,}22 & 0{,}39 & 0{,}31 & 0{,}54 & 0{,}47 & 0{,}79 \end{pmatrix}$$

y los valores de precisión

x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x
Z_A	0,88	Z_B	0,85	Z_D	0,64	Z_E	0,79	Z_F	0,73	Z_G	0,89

c) Para calcular la precisión del desnivel F−G se puede calcular las precisiones de todos los puntos respecto a F y la precisión resultante del punto G será el valor buscado. También se puede interpretar como que queremos la precisión de la magnitud $Z_G - Z_F$ y aplicar directamente la fórmula para la transmisión de varianzas. En ambos casos se llega a las mismas operaciones. Según la segunda interpretación, lo que queremos calcular escrito en forma matricial es

$$Z_G - Z_F = (-1 \quad 1)\begin{pmatrix} Z_F \\ Z_G \end{pmatrix},$$

y en consecuencia su varianza

$$\sigma^2_{G-F} = (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \sigma^2_F & \sigma_{FG} \\ \sigma_{FG} & \sigma^2_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores de la matriz 2×2 que aparecen en esta fórmula se toman de la matriz total Σ_{xx}. Da igual que sea la primera matriz Σ_{xx}, que son las precisiones respecto a un sistema en el que el punto fijo es A, o la segunda, Σ_C, en la que el punto fijo es C, o cualquier otra que se tuviese; el resultado tiene que ser el mismo.

Las operaciones que hay que efectuar son tan pocas que no merece la pena plantearlas en forma matricial. Si desarrollamos el producto obtenemos

$$\sigma^2_{G-F} = \sigma^2_F + \sigma^2_G - 2\sigma_{FG} = 0{,}39\,\text{mm}^2,$$

$$\sigma_{G-F} = 0{,}62\,\text{mm}.$$

□

La mayoría de los valores de precisión obtenidos son submilimétricos a pesar de que estamos suponiendo que solamente se anotan las lecturas hasta el milímetro. Esto se explica por tres razones: En primer lugar, el error de redondeo es *como máximo* de 0,5 mm, lo que significa una desviación típica de 0,29 ([p. 37]), o bien $0{,}29\sqrt{2} = 0{,}41$ en cada nivelada. En segundo lugar, la acumulación de errores de redondeo al milímetro es aleatoria, y al tratarse de una red que se ajusta se reparten y se compensan en gran parte. Para que ello sea así es necesario quedarse con el primer decimal tras el ajuste, o cuando menos con los medios milímetros. Por último no hay que olvidar nunca que el intervalo $\pm\sigma$ contiene solamente el 68 % de probabilidad. En topografía se acostumbra a trabajar con el 95 %, que para una distribución unidimensional como es el caso signfica 2σ, y estos valores ya no son submilimétricos.

3. Escala libre

En el ajuste de la red con medidas angulares obtener las precisiones de los puntos en los siguientes casos:

a) Se toman como puntos fijos Bu y Bo.
b) Se toman como puntos fijos Bu y Ba.

***a*)** Las fórmulas a aplicar son [(13,6) y (13,7)] de la [p. 144]. El punto A es Bu y el punto B es Bo. Sustituyendo los valores de sus coordenadas se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X'}{\partial X_{Bu}} &= 0{,}00089(X - X_{Bu}) - 0{,}00004(Y - Y_{Bu}) - 1,\\
\frac{\partial X'}{\partial Y_{Bu}} &= -0{,}00004(X - X_{Bu}) - 0{,}00089(Y - Y_{Bu}),\\
\frac{\partial X'}{\partial X_{Bo}} &= -0{,}00089(X - X_{Bo}) + 0{,}00004(Y - Y_{Bo}) - 1,\\
\frac{\partial X'}{\partial Y_{Bo}} &= 0{,}00004(X - X_{Bo}) + 0{,}00089(Y - Y_{Bo});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y'}{\partial X_{Bu}} &= 0{,}00004(X - X_{Bu}) + 0{,}00089(Y - Y_{Bu}),\\
\frac{\partial Y'}{\partial Y_{Bu}} &= 0{,}00089(X - X_{Bu}) - 0{,}00004(Y - Y_{Bu}) - 1,\\
\frac{\partial Y'}{\partial X_{Bo}} &= -0{,}00004(X - X_{Bo}) - 0{,}00089(Y - Y_{Bo}),\\
\frac{\partial Y'}{\partial Y_{Bo}} &= -0{,}00089(X - X_{Bo}) + 0{,}00004(Y - Y_{Bo}) - 1.
\end{aligned}$$

A continuación se muestra la matriz A. Hay una fila para cada coordenada. Las columnas se corresponden con la matriz $\Sigma_{xx} = N^{-1}$.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc}
X_{Pu} & Y_{Pu} & X_{Bo} & Y_{Bo} & X_{Le} & Y_{Le} & X_{Be} & Y_{Be} & X_{Bu} & Y_{Bu} & X_{Fe} & Y_{Fe} & X_{Ju} & Y_{Ju}\\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array}\\
\begin{array}{c}
X_{Ba}\\ Y_{Ba}\\ X_{Pu}\\ Y_{Pu}\\ X_{Ou}\\ Y_{Ou}\\ X_{Le}\\ Y_{Le}\\ X_{Be}\\ Y_{Be}\\ X_{Fe}\\ Y_{Fe}\\ X_{Ju}\\ Y_{Ju}
\end{array} &
\begin{pmatrix}
\cdot & \cdot & -0{,}98 & -0{,}32 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}02 & 0{,}32 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & 0{,}32 & -0{,}98 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}32 & -0{,}02 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
1 & \cdot & -0{,}72 & -0{,}36 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}28 & 0{,}36 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & 1 & 0{,}36 & -0{,}72 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}36 & -0{,}28 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & -0{,}26 & -0{,}35 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}74 & 0{,}35 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & 0{,}35 & -0{,}26 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}35 & -0{,}74 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & -0{,}48 & 0{,}13 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}52 & -0{,}13 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & -0{,}13 & -0{,}48 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 0{,}13 & -0{,}52 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & -0{,}74 & 0{,}17 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -0{,}26 & -0{,}17 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & -0{,}17 & -0{,}74 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0{,}17 & -0{,}26 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & -0{,}18 & 0{,}16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}82 & -0{,}16 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & -0{,}16 & -0{,}18 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}16 & -0{,}82 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & 0{,}02 & 0{,}38 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1{,}02 & -0{,}38 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot\\
\cdot & \cdot & -0{,}38 & 0{,}02 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}38 & -1{,}02 & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

El producto $A\Sigma_{xx}A^T$ da lugar a la nueva matriz Σ_{xx}. Se muestran a continuación las submatrices 2×2 así como los elementos de cada elipse y por último las elipses dibujadas en cada punto. Recuérdese que la dirección del eje X es la línea Ou – Ba.

$$N_{\text{Ba}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 77 & -1 \\ -1 & 103 \end{pmatrix}, \qquad N_{\text{Pu}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 100 & 10 \\ 10 & 65 \end{pmatrix},$$

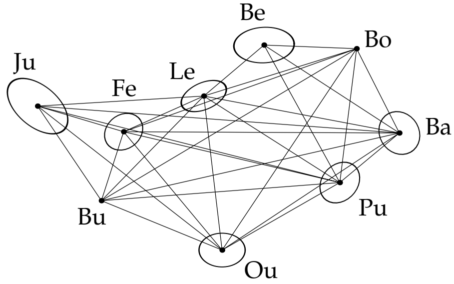
$$N_{\text{Ou}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 95 & -24 \\ -24 & 73 \end{pmatrix}, \qquad N_{\text{Le}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 118 & -12 \\ -12 & 39 \end{pmatrix},$$

$$N_{\text{Be}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 152 & -49 \\ -49 & 95 \end{pmatrix}, \qquad N_{\text{Fe}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 86 & 3 \\ 3 & 57 \end{pmatrix},$$

$$N_{\text{Ju}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 98 & -47 \\ -47 & 243 \end{pmatrix}.$$

	a	b	θ	(m)
Ba	0,025	0,022	$-88°$	
Pu	0,025	0,020	$15°$	
Ou	0,026	0,019	$-33°$	
Le	0,027	0,015	$-9°$	

	a	b	θ	(m)
Be	0,034	0,020	$-30°$	
Fe	0,023	0,019	$6°$	
Ju	0,040	0,023	$-73°$	



b) Ahora en las fórmulas el punto A es Bu y el punto B es Ba. La matriz A de cambio de muestra en la página siguiente. Las columnas relativas a Ba no aparecen porque no se encuentran presentes en la matriz Σ_{xx}, ya que este punto así como Ou, cuyas columnas tampoco aparecen, eran fijos.

$$N_{\text{Pu}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 93 & -6 \\ -6 & 46 \end{pmatrix}, \qquad N_{\text{Bo}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 76 & -8 \\ -8 & 94 \end{pmatrix},$$

$$N_{\text{Ou}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 82 & -26 \\ -26 & 66 \end{pmatrix}, \qquad N_{\text{Le}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 126 & -20 \\ -20 & 48 \end{pmatrix},$$

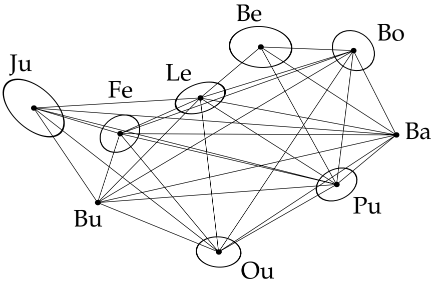
$$N_{\text{Be}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 157 & -52 \\ -52 & 126 \end{pmatrix}, \qquad N_{\text{Fe}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 92 & 3 \\ 3 & 61 \end{pmatrix},$$

$$N_{Ju}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 97 & -45 \\ -45 & 254 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} X_{Pu} & Y_{Pu} & X_{Bo} & Y_{Bo} & X_{Le} & Y_{Le} & X_{Be} & Y_{Be} & X_{Bu} & Y_{Bu} & X_{Fe} & Y_{Fe} & X_{Ju} & Y_{Ju} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} X_{Pu} \\ Y_{Pu} \\ X_{Bo} \\ Y_{Bo} \\ X_{Ou} \\ Y_{Ou} \\ X_{Le} \\ Y_{Le} \\ X_{Be} \\ Y_{Be} \\ X_{Fe} \\ Y_{Fe} \\ X_{Ju} \\ Y_{Ju} \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}23 & 0{,}11 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}11 & -0{,}23 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}08 & -0{,}30 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}30 & -0{,}08 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}65 & 0{,}24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}24 & -0{,}65 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}60 & -0{,}26 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 0{,}26 & -0{,}60 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -0{,}37 & -0{,}38 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0{,}38 & -0{,}37 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -0{,}88 & -0{,}20 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}20 & -0{,}88 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1{,}14 & -0{,}35 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0{,}35 & -1{,}14 & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

	a	b	θ (m)
Pu	0,024	0,017	−7°
Bo	0,025	0,021	−70°
Ou	0,025	0,017	−37°
Le	0,029	0,016	−14°

	a	b	θ (m)
Be	0,035	0,023	−37°
Fe	0,024	0,019	5°
Ju	0,041	0,023	−75°



□

4. Orientación libre

En la red ajustada con medidas de ángulos, distancias y medidas directas de cooordenadas, calcular las precisiones si el sistema se define

a) por el punto Ou y la dirección Ou – Ba.
b) Comparar las precisiones del apartado anterior con las obtenidas en el ejercicio 4 del capítulo 10, apartado b), en el que la definición del sistema de coordenadas es la misma. ¿A qué se deben las diferencias?
c) Calcular las precisiones si el sistema se define por el punto Ba y la dirección Ba – Ju.
d) ¿Por qué en este segundo caso las elipses son ligeramente mejores que en el anterior?

***a*)** Las fórmulas aplicar para obtener la matriz A son [(13.10) y (13.11)] de las [pp. 149 y 150]. El punto A es Ou y el punto B es Ba. Para las filas de punto B, esto es, X_{Ba} e Y_{Ba}, hay que aplicar las fórmulas [(13.12)]. Se obtiene la siguiente matriz:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccc}
X_{Ba} & Y_{Ba} & \multicolumn{2}{c}{Pu} & \multicolumn{2}{c}{Bo} & X_{Ou} & Y_{Ou} & \multicolumn{2}{c}{Le} & \multicolumn{2}{c}{Be} & \multicolumn{2}{c}{Bu} & \multicolumn{2}{c}{Fe} & \multicolumn{2}{c}{Ju} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array} \\
\begin{array}{c}
X_{Ba}\\ Y_{Ba}\\ X_{Pu}\\ Y_{Pu}\\ X_{Bo}\\ Y_{Bo}\\ X_{Le}\\ Y_{Le}\\ X_{Be}\\ Y_{Be}\\ X_{Bu}\\ Y_{Bu}\\ X_{Fe}\\ Y_{Fe}\\ X_{Ju}\\ Y_{Ju}
\end{array} &
\begin{pmatrix}
0{,}70 & 0{,}46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}70 & -0{,}46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}46 & 0{,}30 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}46 & -0{,}30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}17 & 0{,}27 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0{,}83 & -0{,}27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}31 & -0{,}46 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0{,}31 & -0{,}54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}52 & 0{,}79 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0{,}48 & -0{,}79 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}35 & -0{,}53 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}35 & -0{,}47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}40 & 0{,}60 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}60 & -0{,}60 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}05 & 0{,}07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}05 & -1{,}07 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}53 & 0{,}80 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}47 & -0{,}80 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}11 & -0{,}16 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}11 & -0{,}84 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}13 & 0{,}19 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}87 & -0{,}19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}31 & 0{,}47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}31 & -1{,}47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}31 & 0{,}46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}69 & -0{,}46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}26 & 0{,}39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}26 & -1{,}39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-0{,}37 & 0{,}57 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}63 & -0{,}57 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-0{,}48 & 0{,}73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}48 & -1{,}73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Se obtiene como siempre $\Sigma'_{xx} = A\Sigma_{xx}A^{\mathsf{T}}$. Se muestran a continuación las submatrices 2×2 de Σ'_{xx} correspondientes a cada punto, los elementos de cada elipse y las elipses representadas sobre sus puntos. Al contrario que en los ejercicios anteriores, el eje X no sigue la dirección de la línea Ou – Ba sino que es aproximadamente horizontal.

$$N_{\mathrm{Ba}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 20 & 13 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}, \qquad N_{\mathrm{Pu}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 27 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix},$$

$$N_{\mathrm{Bo}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 43 & -4 \\ -4 & 29 \end{pmatrix}, \qquad N_{\mathrm{Le}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 32 & 9 \\ 9 & 28 \end{pmatrix},$$

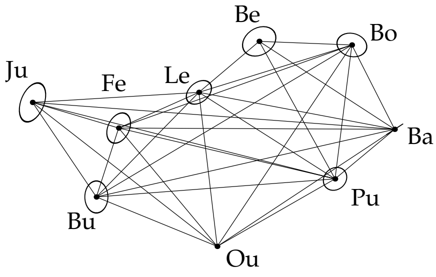
$$N_{\mathrm{Be}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 57 & 14 \\ 14 & 44 \end{pmatrix}, \qquad N_{\mathrm{Bu}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 29 & 0 \\ 0 & 53 \end{pmatrix},$$

$$N_{\mathrm{Fe}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 46 \end{pmatrix}, \qquad N_{\mathrm{Ju}}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 34 & 20 \\ 20 & 75 \end{pmatrix}.$$

	a	b	θ (m)
Ba	0,011	0	33°
Pu	0,014	0,012	41°
Bo	0,017	0,013	−15°
Le	0,016	0,011	40°

	a	b	θ (m)
Be	0,020	0,015	32°
Bu	0,018	0,013	−90°
Fe	0,018	0,012	64°
Ju	0,023	0,013	−68°

El punto Ba sólo tiene variación posible en una dirección, porque la dirección Ou – Ba se tomó como parte de la definición del sistema de coordenadas. Por ello su región de confianza es un segmento y no una elipse, y la longitud del mismo para un 95 % de probabilidad se obtiene multiplicando el valor de σ por 2 en vez por 2,5.



b) En el ejercicio 4 del capítulo 10 no hay medidas directas de coordenadas de puntos, por lo que en esta ocasión las precisiones tienen que ser mejores. La diferencia es muy pequeñas porque solamente hay tres puntos con coordenadas conocidas con una cierta precisión, y de las seis medidas en total que ello supone, tres ya son necesarias para fijar la figura en posición y orientación, por lo que el aporte es en realidad de sólo tres medidas. El punto que más debería mejorar es Ju. En el ejercicio del capítulo 10 el semieje mayor de su elipse para $2{,}5\sigma$ es 24 mm. La medida directa tiene una precisión de 12 mm, lo que significa $2{,}5\sigma = 30$ mm. Por ello apenas aporta nada a la precisión del punto y de la red. Aplicando a este la fórmula que se muestra en el pequeño comentario de la p. 125 para la precisión de una magnitud cuando se tienen dos valores para la misma y se calcula su promedio ponderado obtenemos

$$\frac{24 \cdot 30}{\sqrt{24^2 + 30^2}} = 23,$$

que coincide con el semieje mayor de la elipse obtenido en este ejercicio.

c) Ahora el punto A es Ba y el punto B es Ju. La matriz A se calcula igual que en el apartado a), salvo por el cambio de los puntos A y B. Se muestran solamente las columnas relativas a Ba y Ju:

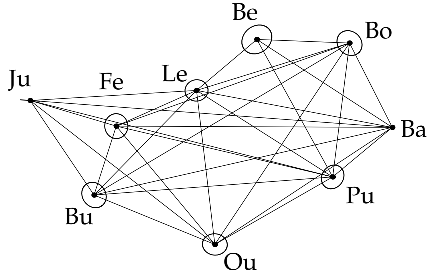
$$\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{rrcrr} X_{\mathrm{Ba}} & Y_{\mathrm{Ba}} & \ldots & X_{\mathrm{Ju}} & Y_{\mathrm{Ju}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{l}
X_{\mathrm{Pu}} \rightarrow \\ Y_{\mathrm{Pu}} \rightarrow \\ X_{\mathrm{Bo}} \rightarrow \\ Y_{\mathrm{Bo}} \rightarrow \\ X_{\mathrm{Ou}} \rightarrow \\ Y_{\mathrm{Ou}} \rightarrow \\ X_{\mathrm{Le}} \rightarrow \\ Y_{\mathrm{Le}} \rightarrow \\ X_{\mathrm{Be}} \rightarrow \\ Y_{\mathrm{Be}} \rightarrow \\ X_{\mathrm{Bu}} \rightarrow \\ Y_{\mathrm{Bu}} \rightarrow \\ X_{\mathrm{Fe}} \rightarrow \\ Y_{\mathrm{Fe}} \rightarrow \\ X_{\mathrm{Ju}} \rightarrow \\ Y_{\mathrm{Ju}} \rightarrow
\end{array} &
\begin{pmatrix}
-1{,}01 & -0{,}14 & \ldots & 0{,}01 & 0{,}14 \\
0{,}01 & -0{,}84 & \ldots & -0{,}01 & -0{,}16 \\
-0{,}98 & 0{,}23 & \ldots & -0{,}02 & -0{,}23 \\
0{,}01 & -0{,}88 & \ldots & -0{,}01 & -0{,}12 \\
-1{,}02 & -0{,}32 & \ldots & 0{,}02 & 0{,}32 \\
0{,}04 & -0{,}51 & \ldots & -0{,}04 & -0{,}49 \\
-0{,}99 & 0{,}10 & \ldots & -0{,}01 & -0{,}10 \\
0{,}04 & -0{,}46 & \ldots & -0{,}04 & -0{,}54 \\
-0{,}98 & 0{,}24 & \ldots & -0{,}02 & -0{,}24 \\
0{,}03 & -0{,}63 & \ldots & -0{,}03 & -0{,}37 \\
-1{,}01 & -0{,}19 & \ldots & 0{,}01 & 0{,}19 \\
0{,}06 & -0{,}18 & \ldots & -0{,}06 & -0{,}82 \\
-1{,}00 & 0{,}00 & \ldots & 0{,}00 & 0{,}00 \\
0{,}06 & -0{,}24 & \ldots & -0{,}06 & -0{,}76 \\
-0{,}99 & 0{,}07 & \ldots & 0{,}99 & -0{,}07 \\
0{,}07 & -0{,}01 & \ldots & -0{,}07 & 0{,}01
\end{pmatrix}.
\end{array}$$

Las submatrices 2×2 de Σ'_{xx} y las elipses son:

$$N_{Pu}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 26 & 3 \\ 3 & 28 \end{pmatrix}, \qquad N_{Bo}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 32 & -6 \\ -6 & 31 \end{pmatrix},$$
$$N_{Ou}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 33 & -1 \\ -1 & 23 \end{pmatrix}, \qquad N_{Le}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix},$$
$$N_{Be}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 44 & 6 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}, \qquad N_{Bu}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 31 & -5 \\ -5 & 34 \end{pmatrix},$$
$$N_{Fe}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 31 \end{pmatrix}, \qquad N_{Ju}^{-1} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 30 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

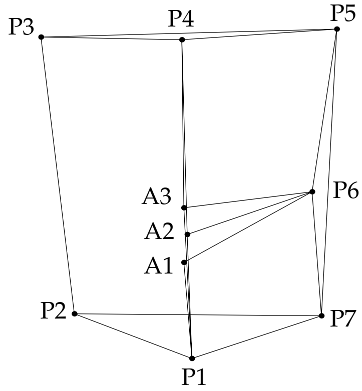
	a	b	θ (m)
Pu	0,014	0,012	55°
Bo	0,015	0,013	−43°
Ou	0,014	0,012	−6°
Le	0,013	0,012	11°

	a	b	θ (m)
Be	0,018	0,015	39°
Bu	0,015	0,013	−53°
Fe	0,014	0,013	85°
Ju	0,011	0	−4°



d) A parte de que a simple vista se ve que las elipses son algo más pequeñas, obtenemos una medida cuantitativa mediante la suma de los elementos de la diagonal de la matriz Σ'_{xx}. En el primer caso es 582 mientras que en el segundo es 461. En el segundo caso la línea que define la orientación, Ba – Ju, es bastante más larga que en el primero, Ou – Ba. La calidad del punto Ju es algo peor que la de Ou, pero la diferencia es pequeña y tiene más importancia la longitud de la línea que define la orientación. □

5. Comparativa



Se quiere emplear los puntos A1, A2 y A3 para desde ellos dar coordenadas por intersección angular a puntos de un objeto. Además se quiere tener el conjunto enlazado con el mundo exterior por si en un futuro hay que situarlo en posición absoluta, y por ello se observó la red que se muestra, simplificada, en la figura, incluyendo entre las estaciones los puntos P1 y P5, que son permanentes y están bien definidos. Para el ajuste de la red se trabajó en un sistema local definido por las coordenadas y desorientación de P1.

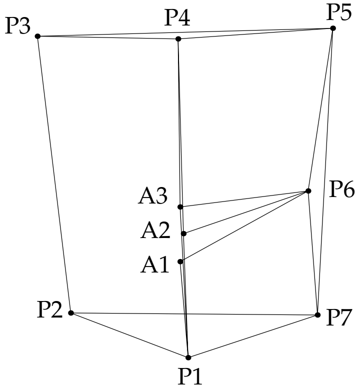
Las coordenadas aproximadas de los puntos son las siguientes:

$$\begin{array}{llll}
X_{P1} \approx 429{,}7, & Y_{P1} \approx 1110{,}0, & X_{P2} \approx 412{,}1, & Y_{P2} \approx 1116{,}7, \\
X_{P3} \approx 407{,}1, & Y_{P3} \approx 1158{,}2, & X_{P4} \approx 428{,}2, & Y_{P4} \approx 1157{,}8, \\
X_{P5} \approx 451{,}4, & Y_{P5} \approx 1159{,}4, & X_{P6} \approx 447{,}7, & Y_{P6} \approx 1135{,}0, \\
X_{P7} \approx 449{,}1, & Y_{P7} \approx 1116{,}4, & X_{A1} \approx 428{,}5, & Y_{A1} \approx 1124{,}4, \\
X_{A2} \approx 429{,}0, & Y_{A2} \approx 1128{,}6, & X_{A3} \approx 428{,}5, & Y_{A3} \approx 1132{,}6.
\end{array}$$

Como resultado del ajuste se obtuvo la siguiente matriz de varianzas para los puntos A1–A3:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} X_{A1} & Y_{A1} & X_{A2} & Y_{A2} & X_{A3} & Y_{A3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
\Sigma_{xx} = & \begin{pmatrix}
0{,}08 & 0{,}01 & 0{,}01 & -0{,}04 & 0{,}02 & -0{,}03 \\
0{,}01 & 0{,}60 & -0{,}03 & 0{,}34 & -0{,}04 & 0{,}34 \\
0{,}01 & -0{,}03 & 0{,}10 & 0{,}01 & 0{,}05 & -0{,}01 \\
-0{,}04 & 0{,}34 & 0{,}01 & 0{,}50 & -0{,}01 & 0{,}37 \\
0{,}02 & -0{,}04 & 0{,}05 & -0{,}01 & 0{,}14 & 0{,}00 \\
-0{,}03 & 0{,}34 & -0{,}01 & 0{,}37 & 0{,}00 & 0{,}49
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Los valores son milímetros (es decir, mm^2).



Dar unos valores de precisión planimétricas de los puntos A1, A2, A3 en las siguientes situaciones:

a) Tal como han resultado del ajuste.
b) Reduciendo las precisiones respecto a A2.
c) El objeto que se va a medir no necesita estar orientado al Norte, pero tiene que estar en escala.
d) El objeto no necesita estar orientado y además puede estar en una escala arbitraria.
e) Sus precisiones absolutas, suponiendo que en el futuro se da coordenadas a los puntos P1 y P5 con precisión de 2 cm.

Dar todos los valores para el 95 % de probabilidad.

a) Las precisiones de cada una de las coordenadas son las raíces cuadradas de los elementos de la diagonal de Σ_{xx}. En lo sucesivo omitiremos la letra A del nombre de estos tres puntos en los subíndices. Todos los valores son milímetros.

x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x	x	σ_x
X_1	0,28	Y_1	0,78	X_2	0,32	Y_2	0,71	X_3	0,38	Y_3	0,70

Sin más que mirar los valores de la matriz Σ_{xx} se ve claramente que las coordenadas X e Y de cada punto apenas están correladas, así que como semieje mayor podemos tomar sin error importante el mayor de los valores para X e Y. Multiplicamos por 2,5 para que la probabilidad de la elipse sea del 95 %:

	a		a		a
A1	1,9	A2	1,8	A3	1,8

b) La matriz A de cambio de sistema es

$$\begin{array}{ll} X_1 \to \\ Y_1 \to \\ X_3 \to \\ Y_3 \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El parámetro correspondiente a cada columna no lo mostraremos porque siempre serán $X_1 \ldots Y_3$.

Se obtiene la nueva matriz de varianzas:

$$\Sigma'_{xx} = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}09 & 0{,}06 & 0{,}02 \\ 0{,}09 & 0{,}42 & 0{,}01 & 0{,}13 \\ 0{,}06 & 0{,}01 & 0{,}15 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}13 & 0{,}02 & 0{,}26 \end{pmatrix}.$$

Las correlaciones son otra vez muy pequeñas así que volvemos a tomar como semieje mayor el mayor de los valores para X e Y, que vuelve a ser el de Y:

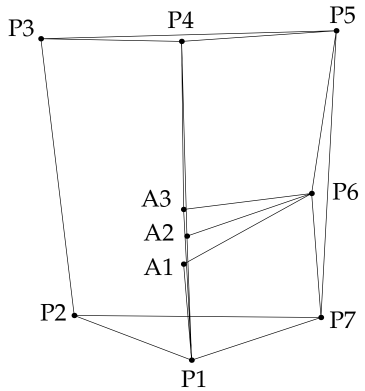
	a		*a*
A1	1,6	A3	1,3

y el punto A2 es fijo.

c) Para fijar posición y orientación tomamos como fijos el punto A1 y la dirección A1 – A3; siempre se debe tomar para fijar la orientación el eje más largo posible. Las fórmulas a aplicar son [(13.10) y (13.11)]; el punto A es A1 y el punto B es A3. para el propio punto B, es decir, para A3, se aplica [(13.12)]. La matiz de cambio de sistema resulta

$$\begin{array}{ll} X_2 \to \\ Y_2 \to \\ X_3 \to \\ Y_3 \to \end{array} \begin{pmatrix} -0{,}49 & 0 & 1 & 0 & -0{,}51 & 0 \\ -0{,}06 & -1 & 0 & 1 & 0{,}06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La gran cantidad de ceros se debe a que las coordenadas Y de A_1 y A_3 son aproximadamente iguales. Nótese en particular la fila de ceros para X_3. Al estar los puntos A_1, A_3 situados según el eje Y, mantener fija la dirección $A_1 - A_3$ equivale a fijar la coordenada X de A_3.



La matriz de varianzas que resulta es

$$\Sigma''_{xx} = \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}00 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}43 & 0{,}00 & 0{,}30 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}03 & 0{,}30 & 0{,}00 & 0{,}42 \end{pmatrix}.$$

Una vez más las correlaciones son muy pequeñas. Para el punto A_3 sólo hay una dirección variable, por lo que para el intervalo del 95 % de probabilidad se multiplica por 2 en lugar de por 2,5.

	a		*a*
A2	1,6	A3	1,3

y el punto A1 es fijo.

***d*)** Para fijar posición, orientación y escala tomamos como fijos los puntos A1 y A3. Las fórmulas a aplicar son [(13.6) y (13.7)]; el punto A es A1 y el punto B es A3. La matiz de cambio de sistema resulta

$$\begin{array}{l} X_2 \rightarrow \\ Y_2 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} -0{,}49 & 0{,}06 & 1 & 0 & -0{,}51 & -0{,}06 \\ -0{,}06 & -0{,}49 & 0 & 1 & 0{,}06 & -0{,}51 \end{pmatrix}$$

y la nueva matriz de varianzas

$$\Sigma'''_{xx} = \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}03 \\ 0{,}03 & 0{,}23 \end{pmatrix}.$$

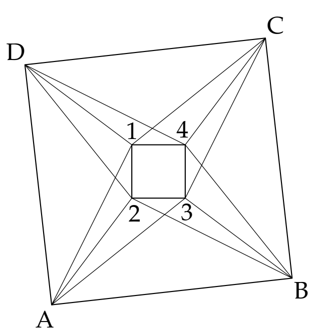
Los puntos A1 y A3 son fijos y la precisión de A2 es $2{,}5\sqrt{0{,}23} = 1{,}2$ mm.

***e*)** Para obtener la precisión de los puntos A1–A3 en el sistema absoluto hay que componer su precisión en el sistema relativo con la precisión de este sistema respecto al absoluto, que son los 2 cm de precisión de las coordenadas de los puntos P1 y P5. Como esta última componente es mucho mayor que la otra no es necesario efectuar ningún cálculo, y la precisión de los puntos A1, A2 y A3 en el sistema absoluto es de 2 cm. □

Cuando se den coordenadas a puntos desde las bases A1, A2 y A3 se obtendrá su precisión como la composición cuadrática de la precisión de la intersección con la precisión de las propias bases. Este ejercicio pone de manifiesto la importancia de obtener las precisiones de las bases en el sistema adecuado. Si empleamos directamente la que se obtiene del ajuste estaremos dando unos valores peores que la precisión que realmente tienen. El resultado del ajuste es la precisión en el sistema local de la red, definido por las coordenadas y desorientación de P1. De cara a la precisión *interna* del objeto que se vaya a levantar desde los puntos A1–A3, interesa la precisión de éstos en un sistema definido por ellos mismos, que es el que proporcionará valores más bajos. Así, se pasa de unos valores de casi 2 mm a unos de 0, 1,3, 1,6 en el caso de orientación libre pero escala fija (lo más habitual) o de 0, 0, 1,2 si la escala también es libre. Estos últimos valores pueden ser los adecuados incluso aun cuando la escala no sea libre si lo que queremos es la precisión de las diferencias de coordenadas de puntos del objeto que estén próximos entre sí (próximos en relación a la propia distancia que separa los puntos A1, A2 y A3).

Los valores que se dan normalmente en topografía para las precisiones de magnitudes en sistemas locales suelen ser peores que las precisiones que realmente tienen esas magnitudes en el sistema local.

6. Reducción al centro de gravedad

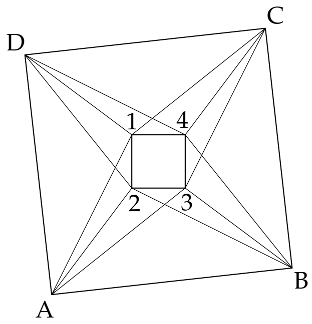


El objetivo de esta red es dar coordenadas a los cuatro puntos internos con la mayor precisión posible para ver cómo se ajustan sus vértices a un cuadrado de 2 metros de lado como en teoría debería ser. Los resultados se darán todos al 95 % de probabilidad. Esta red es la del ejercicio 9 del capítulo 9, y de ahí pueden obtenerse las matrices de varianzas necesarias.

a) Obtener las presisiones en el sistema en el que se calculó la figura.

b) Obtener las precisiones en un sistema definido fijando el punto 1 y la dirección 1-3.

c) Reducir las precisiones anteriores al centro de gravedad de los cuatro puntos.



d) Obtener las precisiones en un sistema definido mediante las coordenadas y desorientación de A.

e) Representar las elipses en los dos últimos casos.

a) Tomando el doble de la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal de N^{-1}, que se muestran en la página 116 obtenemos los siguientes valores, en milímetros:

x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$
X_2	0,14	Y_2	0,22	X_3	0,22	Y_3	0,23	X_4	0,22	Y_4	0,14

b) Necesitamos la matriz de varianzas de los puntos 1–4, que se obtuvo en el capítulo de ángulos y distancias aunque allí no se mostró. Es la siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \Sigma_{xx} = 10^{-9} \times & \begin{pmatrix} 4{,}9 & 0{,}1 & 2{,}3 & 0{,}7 & 2{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 12{,}5 & -5{,}3 & 10{,}4 & -5{,}3 & 2{,}7 \\ 2{,}3 & -5{,}3 & 12{,}2 & -4{,}5 & 9{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 10{,}4 & -4{,}5 & 13{,}4 & -5{,}3 & 3{,}0 \\ 2{,}1 & -5{,}3 & 9{,}8 & -5{,}3 & 12{,}6 & -0{,}1 \\ 0{,}7 & 2{,}7 & 0{,}7 & 3{,}0 & -0{,}1 & 5{,}2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Necesitamos también unas coordenadas aproximadas de los cuatro puntos:

$$\begin{array}{llll} X_1 \approx 16{,}9, & Y_1 \approx 20{,}85, & X_2 \approx 16{,}9, & Y_2 \approx 18{,}85, \\ X_3 \approx 18{,}9, & Y_3 \approx 18{,}8, & X_4 \approx 18{,}9, & Y_4 \approx 20{,}8. \end{array}$$

Según las fórmulas [(13.10), (13.11) y (13.12)] de las [pp. 149-151] la matriz A para el cambio de sistema es la que se muestra en la página siguiente.

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} X_2 \rightarrow \\ Y_2 \rightarrow \\ X_3 \rightarrow \\ Y_3 \rightarrow \\ X_4 \rightarrow \\ Y_4 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \cdot & -0{,}51 & -0{,}49 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0{,}01 & 0{,}01 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0{,}49 & -0{,}50 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -0{,}50 & 0{,}51 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -0{,}01 & -0{,}01 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -0{,}51 & -0{,}49 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La nueva matriz de varianzas es

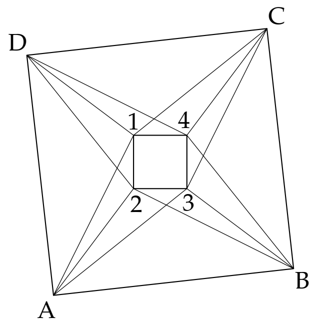
$$\Sigma'_{xx} = 10^{-9} \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5{,}9 & -2{,}4 & 1{,}0 & -1{,}0 & -0{,}2 & 1{,}4 \\ -2{,}4 & 12{,}6 & -7{,}8 & 8{,}0 & -5{,}3 & 0{,}3 \\ 1{,}0 & -7{,}8 & 8{,}4 & -8{,}7 & 7{,}4 & -0{,}9 \\ -1{,}0 & 8{,}0 & -8{,}7 & 8{,}9 & -7{,}6 & 1{,}0 \\ -0{,}2 & -5{,}3 & 7{,}4 & -7{,}6 & 12{,}5 & -2{,}4 \\ 1{,}4 & 0{,}3 & -0{,}9 & 1{,}0 & -2{,}4 & 5{,}6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Se obtienen las precisiones:

x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$
X_2	0,15	Y_2	0,22	X_3	0,18	Y_3	0,19	X_4	0,22	Y_4	0,15

***c*)** Ahora partimos de la matriz Σ'_{xx} del apartado anterior. La matriz A de cambio de sistema es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} X_1 \rightarrow \\ Y_1 \rightarrow \\ X_2 \rightarrow \\ Y_2 \rightarrow \\ X_3 \rightarrow \\ Y_3 \rightarrow \\ X_4 \rightarrow \\ Y_4 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot \\ \cdot & \frac{3}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \cdot & \frac{3}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot & \frac{3}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot & \frac{3}{4} & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array},$$



La nueva matriz Σ''_{xx} y las precisiones son

$$
10^{-9} \times
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
2{,}7 & -2{,}2 & 1{,}0 & 1{,}7 & -1{,}5 & 2{,}2 & -2{,}2 & -1{,}7 \\
-2{,}2 & 2{,}9 & -1{,}7 & -2{,}4 & 2{,}2 & -1{,}6 & 1{,}7 & 1{,}1 \\
1{,}0 & -1{,}7 & 5{,}3 & -0{,}2 & -2{,}2 & 1{,}6 & -4{,}1 & 0{,}2 \\
1{,}7 & -2{,}4 & -0{,}2 & 5{,}0 & -1{,}7 & 1{,}2 & 0{,}2 & -3{,}8 \\
-1{,}5 & 2{,}2 & -2{,}2 & -1{,}7 & 2{,}7 & -2{,}2 & 1{,}0 & 1{,}7 \\
2{,}2 & -1{,}6 & 1{,}6 & 1{,}2 & -2{,}2 & 2{,}8 & -1{,}6 & -2{,}4 \\
-2{,}2 & 1{,}7 & -4{,}1 & 0{,}2 & 1{,}0 & -1{,}6 & 5{,}4 & -0{,}3 \\
-1{,}7 & 1{,}1 & 0{,}2 & -3{,}8 & 1{,}7 & -2{,}4 & -0{,}3 & 5{,}1
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$
X_1	0,10	Y_1	0,11	X_2	0,15	Y_2	0,14
X_3	0,10	Y_3	0,11	X_4	0,15	Y_4	0,14

***d*)** Para este apartado la matriz Σ_{xx} de partida ha de incluir además las filas y columnas de X_A, Y_A y Σ_A. Se muestra a continuación una porción:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 & \Sigma_A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
10^{-10} \times & \begin{pmatrix}
49 & 1 & 23 & 7 & 21 & 7 & -0{,}37 \\
1 & 125 & -53 & 104 & -53 & 27 & 0{,}12 \\
23 & -53 & 122 & -45 & 98 & 7 & -0{,}23 \\
7 & 104 & -45 & 134 & -53 & 30 & -0{,}21 \\
21 & -53 & 98 & -53 & 126 & -1 & -0{,}12 \\
7 & 27 & 7 & 30 & -1 & 52 & -0{,}13 \\
-0{,}37 & 0{,}12 & -0{,}23 & -0{,}21 & -0{,}12 & -0{,}13 & 0{,}22
\end{pmatrix}.
\end{array}
$$

No se muestran las filas y columnas de X_A e Y_A.

Para plantear la matriz A de cambio de sistema se aplican las fórmulas de la [p. 147]. Se obtiene

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} X_A & Y_A & X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 & \Sigma_A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} X_1 \rightarrow \\ Y_1 \rightarrow \\ X_2 \rightarrow \\ Y_2 \rightarrow \\ X_3 \rightarrow \\ Y_3 \rightarrow \\ X_4 \rightarrow \\ Y_4 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix}
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -10{,}8 \\
\cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6{,}9 \\
-1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -8{,}8 \\
\cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6{,}9 \\
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -8{,}8 \\
\cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 8{,}9 \\
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -10{,}8 \\
\cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 8{,}9
\end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Si la matriz N^{-1} del ajuste tiene entre los parámetros X_A e Y_A por un lado y X_2, Y_2, etc. por otro los parámetros correspondientes a las coordenadas de los puntos B, C y D, y queremos aprovechar esa matriz, en la matriz A debemos incluir 6 columnas de ceros entre Y_A y X_2.

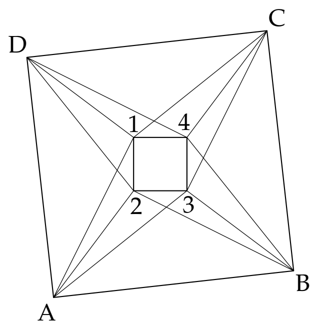
La nueva matriz Σ'''_{xx} y las precisiones son

$$\Sigma'''_{xx} = 10^{-9} \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 84 & 128 & 81 & 104 & 105 & 104 & 105 & 127 \\ 128 & 203 & 127 & 163 & 163 & 162 & 163 & 200 \\ 81 & 127 & 83 & 104 & 104 & 104 & 105 & 127 \\ 104 & 163 & 104 & 136 & 134 & 133 & 134 & 163 \\ 105 & 163 & 104 & 134 & 138 & 134 & 136 & 163 \\ 104 & 162 & 104 & 133 & 134 & 135 & 134 & 162 \\ 105 & 163 & 105 & 134 & 136 & 134 & 139 & 162 \\ 127 & 200 & 127 & 163 & 163 & 162 & 162 & 202 \end{pmatrix} \end{array},$$

x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$	x	$2\sigma_x$
X_1	0,58	Y_1	0,90	X_2	0,58	Y_2	0,74
X_3	0,74	Y_3	0,74	X_4	0,75	Y_4	0,90

□

Aparte de que es obvio que con esta elección de los parámetros fijos las precisiones son peores, debe observarse que los elementos de Σ'''_{xx} de fuera de la diagonal son muy altos en relación a la diagonal principal. Si un elemento se encuentra en la fila i, columna j su máximo valor absoluto posible es $\sqrt{\sigma_i^2\sigma_j^2}$. Cuanto más se acerque a este valor mayor es la correlación de los errores en los parámetros i y j. Así por ejemplo, para el valor 81 de la primera fila su máximo valor posible es



$$\sqrt{84 \cdot 83} = 83{,}5,$$

por lo que se acerca mucho. Esto significa que los errores en X_1 y X_2 están muy correlados.

Una correlación muy alta y positiva entre dos valores significa que la precisión de la resta de ambos es mucho mayor que la de cada uno de ellos por separado. En este caso en concreto la razón es que por estar el origen del sistema de coordenadas lejos la precisión de cada coordenada no es muy buena, pero las mayores causas de error son comunes a los cuatro puntos y actúan sobre ellos casi por igual, de ahí que la precisión de sus diferencias, es decir, la precisión de sus coordenadas entre sí, sea mejor que la de cada uno de ellos.

En cuanto a las causas de error a las que se hizo alusión, son los errores en la posición y desorientación de las estaciones B, C y D; un desplazamiento o giro de una de esas estaciones causa desplazamientos parecidos en los cuatro puntos del centro. Esto sucede cualquiera que sea la definición del sistema de coordenadas, pero si tomamos los valores de (X_1, Y_1) como definitorios del sistema, junto con otra magnitud, estos desplazamientos se traducirán en precisiones bajas para los puntos de fuera, mientras que fijando uno de los puntos de fuera los desplazamientos suponen bajas precisiones para los puntos de dentro y el punto del cuadrilátero de fuera que se encuentre en su diagonal.

Las correlaciones se verán claramente en el apartado siguiente, al representar las elipses.

e) Las matrices 2×2 de cada punto son submatrices de Σ''_{xx} y Σ'''_{xx}, que se muestran en las páginas anteriores. Para la primera matriz, la correspondiente a las coordenadas respecto al centro de gravedad, las elipses son:

	a	b	θ	(mm)
1	0,18	0,06	$-51°$	
2	0,18	0,17	$-30°$	

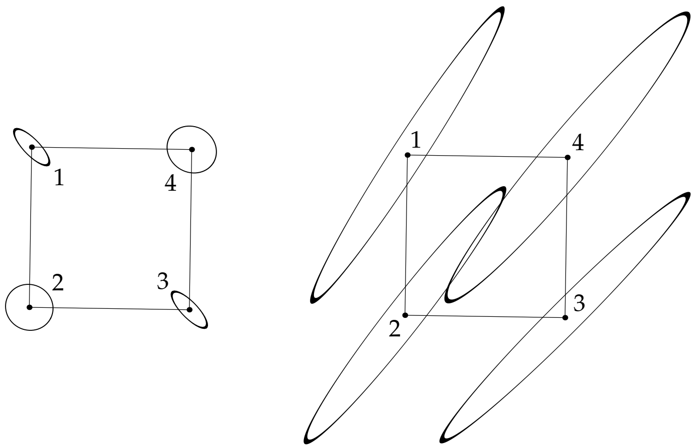
	a	b	θ	(mm)
3	0,18	0,06	$-51°$	
4	0,19	0,17	$-34°$	

Para el sistema de coordenadas definido por la posición y orientación de la estación A son

	a	b	θ	(mm)
1	1,3	0,12	$64°$	
2	1,2	0,13	$58°$	

	a	b	θ	(mm)
3	1,3	0,12	$50°$	
4	1,4	0,18	$56°$	

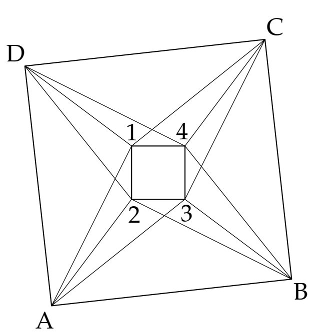
Por último las elipses en uno y otro caso:



□

La elección de definir el sistema tomando como fijas las coordenadas y la desorientación del punto A es normal, y me atrevería a decir que es la que la mayoría de los topógrafos tomarían. Ello lleva a dar para los puntos 1-4 unas precisiones peores que las que realmente tienen (peor sería al revés). Como las precisiones en las coordenadas es algo que viene obligado, esto significa que se emplearán métodos más costosos que los realmente necesarios.

Las elipses respecto al sistema definido por el centro de gravedad ponen de manifiesto que antes de reducir al centro de gravedad el sistema se había definido mediante las coordenadas de 1 y la orientación 1-3; no por porque sean largas en esa dirección, sino porque son cortas en la dirección perpendicular. Al igual que reduciendo al centro de gravedad se elimina el carácter señalado del punto 1 también es posible definir la orientación de manera que ninguna dirección sea especial, aunque esto no se llegó a desarrollar en el libro de teoría.



La suma de las varianzas de los cuatro puntos, esto es,

$$\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{y_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 + \sigma_{y_3}^2 + \sigma_{x_4}^2 + \sigma_{y_4}^2,$$

vale

- $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ para el sistema definido por (X_A, Y_A, Σ_A).

- $0{,}054 \cdot 10^{-6}$ para el sistema definido por $(X_1, Y_1, 1\text{-}3)$.
- $0{,}032 \cdot 10^{-6}$ para el sistema definido por (c.g. de $\{1, 2, 3, 4\}$, 1-3).