Problema: Para cada número natural n sea $d\,n$ el número de divisores de n. Si un número n cumple $d\,m < d\,n$ para todo $m < n$ se dice que el número es redondo. Demostrar las siguientes propiedades:

I. Sea P un número natural cualquiera. A partir de un cierto punto todos los números redondos son divisibles por P.

II. Para cada número redondo N sea p_n el mayor número primo por el cual es divisible. Encontrar una función sencilla f tal que $\log N \sim f p_n$ (cuando $N \to \infty$).

III. Sean α y β dos números enteros y, para cada N, q el mayor número primo cuyo exponente en la descomposición de N es $\geq \alpha$ y r el mayor número primo cuyo exponente es $\geq \beta$. Demostrar

$$\frac{\log q}{\log r} \sim \frac{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}, \qquad N \to \infty$$

IV. Demostrar que la convergencia del apartado anterior es uniforme para todos los α, β tales que $q, r > (\log p_n)^{22/5}$. Es decir, que si para cada N la cantidad δ es la máxima difierencia a 1 del cociente entre el término izquierdo y el derecho para todos los pares α, β considerados, $\delta \to 0$ cuando $N \to \infty$.

Solución

I. Sea N un número redondo y $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\, p_n^{\alpha_n}$ su descomposición en factores primos, con $p_1 < p_2 < p_3 <$ etc. Se tiene obviamente $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq$ etc. El número de divisores de N es

$$d\,N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1).$$

Sea p un número primo cualquiera y p^α la máxima potencia de p que divide a N. Si p no divide a N entonces $\alpha = 0$. El exponente de otro primo cualquiera q en la descomposición de N, sea β, está acotado por el hecho de ser p^α la máxima potencia de p que divide a N. Si $q < p$ y β es muy grande añadimos en la descomposición de N un factor p y eliminamos tantos factores q como sea necesario para que el número resultante, M, sea menor. La razón $d\,M/d\,N$ es

$$\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\,\frac{\beta-k+1}{\beta+1},$$

siendo k el número de fatores q eliminados. Si β es suficientemente grande este cociente es > 1, de modo que $d\,M > d\,N$ y $M < N$, por lo que N no puede ser un número redondo.

Si $q > p$ y $\beta > 0$ eliminamos un factor q y añadimos tantos factores p como sea posible de manera que el número resultante, M, sea menor que N. La razón $d\,M/d\,N$ es

$$\frac{\alpha+k+1}{\alpha+1}\,\frac{\beta}{\beta+1},$$

siendo k el número de fatores p añadidos. Si β es suficientemente grande este cociente es > 1, de modo que $d\,M > d\,N$ y $M < N$, por lo que N no puede ser un número redondo.

Si además q es suficientemente grande, el número k será tan grande que este cociente será > 1 incluso para $\beta = 1$, es decir, que el mayor primo divisor de N también está acotado.

Si N no es múltiplo de P existe alguna potencia p^α que divide a P pero no a N. Si p^γ es la máxima potencia de p que divide a N se cumple pues $\gamma < \alpha$. Según lo que acabamos de ver los exponentes de todos los factores primos de N están acotados en función de γ. Las cotas serán mayores cuanto mayor sea γ. Si p^α es la mayor potencia de p que divide a P el máximo valor posible de γ es $\alpha - 1$. Sea $N = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \ldots$. Sean $\beta_1^{(p)}$, $\beta_2^{(p)}$ ... las cotas de los exponentes β_1, β_2 ... correspondientes a $\gamma = \alpha - 1$. Sean β_1, β_2 ... los máximos de $\beta_1^{(p)}$, $\beta_2^{(p)}$ ... para todos los primos p que dividen a P. Nótese que a partir de un cierto punto todos los β_n son cero. Se tiene entonces que si N es un número redondo y N no divide a P se ha de cumplir

$$N \leq M = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n},$$

y recíprocamente, si N es redondo y $N > M$ entonces N divide a P, Q.E.D.

II. Vamos a concretar la cota del apartado anterior. El número mínimo de fatores q que es necesario tomar para que su producto sea mayor que p es $k = \left[\log_q p\right] + 1$. La desigualdad que acota el exponente β de q en función del exponente α de p cuando $q < p$ es

$$\frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} \frac{\beta - k + 1}{\beta + 1} < 1.$$

Como primo p tomamos p_{n+1}, de donde $\alpha = 0$. La desigualdad queda

$$\frac{\beta - \left[\log_q p_{n+1}\right]}{\beta + 1} < \frac{1}{2}$$

de donde

$$\beta < 1 + 2\left[\log_q p_{n+1}\right]$$

o bien

$$\beta - 1 < 2\left[\log_q p_{n+1}\right], \tag{1}$$

que es la que nos interesará para este apartado.

En el otro sentido (aunque no nos hará falta), si ahora k es el número máximo de factores q que se pueden tomar de manera que su producto sea menor que p se tiene $k = \left[\log_q p\right]$, y el exponente β ha de cumplir

$$\frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{\beta + k + 1}{\beta + 1} < 1.$$

Como primo p tomamos p_n, de donde $\alpha = 1$. La desigualdad queda

$$\frac{\beta + 1 + \left[\log_q p_n\right]}{\beta + 1} < 2.$$

de donde

$$\beta > \left[\log_q p_n\right] - 1.$$

Por otra parte, sea

$$N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} ...\, r_1^3 r_2^3 ...\, r_n^3 q_1^2 q_2^2 ...\, q_n^2 p_1 p_2 ...\, p_n,$$

en donde las distintas n representan números distintos. Establecermos unas cotas máximas y mínimas para q_n, r_n, etc. en función de p_n, pero de momento en este apartado nos basta una cota superior para q_n.

Podemos construir un número M con un mayor número de divisores que N añadiendo los factores p_{n+1} y p_{n+2} y eliminando q_n, q_{n-1} y q_{n-2}. Se tiene $d\,M/d\,N = 4\,\frac{8}{27} > 1$. Para que N sea un número redondo ha de cuplirse $M > N$, es decir $q_{n-2}q_{n-1}q_n < p_{n+1}p_{n+2}$, lo que establece una cota superior para q_n en función de p_n:

$$q_{n-2} < p_{n+2}^{2/3}.$$

El cociente entre números primos consecutivos tiende a 1, de manera que a partir de un cierto N se cumplirá, por ejemplo,

$$q_n < p_n^{3/4}.$$

Procedemos ya a acotar $\log N$. Por una parte

$$\log N > \log 2 + \log 3 + ... + \log p_n \sim p_n.$$

Por otra

$$\log N = (\log 2 + \log 3 + ... + \log p_n) +$$
$$+ (\alpha_1 - 1)\log 2 + (\alpha_2 - 1)\log 3 + ... + 2\log r_n + \log q_1 + ... + \log q_n$$

Por la desigualdad (1) todos los sumandos fuera del primer paréntesis son menores que $2\log p_{n+1}$ y su número es $< q_n$. Por tanto

$$\log N < (\log 2 + \log 3 + ... + \log p_n) + p_n^{3/4}\, 2\log p_{n+1} \sim p_n,$$

de donde $\log N \sim p_n$.

III. Si p_n es suficientemente grande la desigualdad $q_{n-6} ...\, q_{n-1} q < p_{n+1} ...\, p_{n+4}$, que podemos construir en base a $2^4 (2/3)^7 > 1$, proporciona una cota más ajustada para q_n. En general, sea x_n el mayor número primo cuyo exponente es $\geq \alpha$ en la descomposición de N, e y_n el mayor número primo cuyo exponente es $\geq \beta$. (x_n e y_n son los números q y r del enunciado). De una solución (μ, ν) de la desigualdad

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\nu} \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^{\mu} > 1 \qquad (2)$$

se puede establecer la desigualdad

$$x_{n-\nu+1}x_{n-\nu+2}\dots\ x_n < y_{n+1}y_{n+2}\dots\ y_{n+\mu} \tag{3}$$

ya que de lo contrario N no sería un número redondo. Si alguno de los exponentes de $x_{n-\nu+1}$, $x_{n-\nu+2}$ ... es mayor que α, o alguno de los de $y_{n+\mu}$, $y_{n+\mu-1}$ ... es menor que β, la desigualdad que relaciona ν y μ queda, en lugar de con la forma (2), con una forma más favorable, en el sentido de que ν podrá hacerse mayor para un mismo μ o μ hacerse menor para un mismo ν, y *a fortiori* basta con que el par μ, ν cumpla la ecuación (2) tal como está escrita.

Cuando $N \to \infty$ tanto x_n como y_n tienden a infinito (para unos α, β fijos), de acuerdo a la propiedad del apartado I. Puesto que el cociente entre números primos consecutivos tiende a 1, la desigualdad (3) es

$$x_n^\nu < y_n^\mu\, \epsilon,$$

en donde $\epsilon > 1$ pero $\epsilon \to 1$, manteniendo la solución (μ, ν) fija. Escribimos esto como

$$\frac{\log x_n}{\log y_n} < \epsilon\, \frac{\mu}{\nu}. \tag{4}$$

El cociente μ/ν está limitado por (2):

$$\frac{\mu}{\nu} > \frac{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}.$$

Podemos aproximar por defecto el número irracional de la derecha con fracciones μ/ν cada vez más próximas al valor exacto a costa de tomar pares (μ, ν) más grandes. Para una solución (μ, ν) fija el valor de ϵ tiende a 1, de manera que cuando $p_n \to \infty$ podemos tomar una sucesión de pares (μ, ν) cada vez más ajustados al valor del miembro derecho y aun así tener $\epsilon \to 1$. Por lo tanto se tiene

$$\frac{\log x_n}{\log y_n} < \epsilon\theta\, \frac{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}, \tag{5}$$

con $\theta > 1$, $\epsilon > 1$, $\theta \to 1$ y $\epsilon \to 1$.

En el otro sentido, si tomamos unos valores (μ', ν') que satisfagan

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\nu'}\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^{\mu'} < 1 \tag{2'}$$

se ha de cumplir, por ser N un número redondo,

$$x_n x_{n+1}\dots\ x_{n+\nu'} < y_{n-\mu+1}y_{n-\mu+2}\dots\ y_n, \tag{3'}$$

de donde

$$x_n^{\nu'} > y_n^{\mu'}\, \epsilon',$$

$$\frac{\log x_n}{\log y_n} > \frac{\mu'}{\nu'}\,\epsilon', \tag{4'}$$

en donde $\epsilon' < 1$ pero $\epsilon' \to 1$ cuando $N \to \infty$.

El cociente μ'/ν' está limitado por $(2')$:

$$\frac{\mu'}{\nu'} < \frac{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{\beta}\right)},$$

y repitiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior se deduce

$$\frac{\log x_n}{\log y_n} > \epsilon\theta\,\frac{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}, \tag{5'}$$

con $\theta < 1$, $\epsilon < 1$, $\theta \to 1$ y $\epsilon \to 1$.

La unión de (5) y $(5')$ es

$$\frac{\log x_n}{\log y_n} \sim \frac{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{\beta}\right)},$$

como se trataba de demostrar.

IV. Vamos a ver que en (4) y $(4')$ también se cumple $\epsilon \to 1$ y $\epsilon' \to 1$ aunque tomemos el mismo ϵ y el mismo ϵ' para todos los (α, β) que hay que considerar para cada N (es decir, que ahora ϵ es el máximo de todos los ϵ que se derivan de (3) para todos los (α, β) que consideramos). Para cada par (α, β) mantendremos los mismos pares (μ, ν) y (μ', ν') para todo N.

En primer lugar podemos simplificar algo los desarrollos observando que basta demostrar la propiedad pedida para el caso $\beta = 1$, $y_n = p_n$, ya que

$$\frac{\log x_n}{\log y_n} = \frac{\log x_n}{\log p_n}\frac{\log p_n}{\log y_n},$$

de donde el valor de una fración para unos (α, β) cualesquiera es el producto de la correspondiente a $(\alpha, 1)$ y el inverso de la correspondiente a $(\beta, 1)$. Así las ecuaciones (2) y $(2')$ quedan, tras aislar ν y ν',

$$\nu < \mu\,\frac{\log 2}{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}, \tag{6}$$

$$\nu' > \mu'\,\frac{\log 2}{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}, \tag{6'}$$

Tomaremos unos valores μ y μ' fijos, los mismos para todos los α. Así ν y ν' quedan definidos, para cada α, como el mayor y menor entero, respectivamente, que satisfacen las ecuaciones anteriores.

Las ecuaciones (3) y ($3'$) quedan

$$x_{n-\nu+1}x_{n-\nu+2}\cdots\, x_n < p_{n+1}p_{n+2}\cdots\, p_{n+\mu},$$

$$x_{n+1}x_{n+2}\cdots\, x_{n+\nu'} > p_{n-\mu+1}p_{n-\mu+2}\cdots\, p_n,$$

o bien

$$x_{n-\nu+1}x_{n-\nu+2}\cdots\, x_n < p_n^{\mu}\,\delta, \tag{7}$$

$$x_{n+1}x_{n+2}\cdots\, x_{n+\nu'} > p_n^{\mu}\,\delta', \tag{7'}$$

en donde δ y δ' dependen solo de N, $\delta > 1$, $\delta' < 1$ y ambas $\to 1$ cuando $N \to \infty$.

Queremos demostrar que en ambos casos el producto del miembro izquierdo es prácticamente igual que x_n^{ν} y $x_n^{\nu'}$ respectivamente. El caso más desfavorable es aquél en el que x_n es el más pequeño posible, porque además coincide con los valores máximos de ν y ν'. Sea pues x_n igual al primer primo mayor que $(\log p_n)^{22/5}$ (el primer x_n posible tal vez sea otro primo mayor que este), y sean

$$x_{n-1} = x_n\left(1-\frac{\delta_1}{x_n}\right), \quad x_{n-2} = x_n\left(1-\frac{\delta_2}{x_n}\right), \quad \text{etc.}$$

Por tanto $\delta_1 = x_n - x_{n-1}$, $\delta_2 = x_n - x_{n-2}$, etc. La inecuación (7) queda escrita en función de estas cantidades como

$$x_n^{\nu}\prod\left(1-\frac{\delta_i}{x_n}\right) < p_n^{\mu}\,\delta. \tag{8}$$

Queremos demostrar que $\prod\left(1-\frac{\delta_i}{x_n}\right) \to 1$. Para ello basta demostrar $\left(1-\frac{\delta_\nu}{x_n}\right)^{\nu} \to 1$, que a su vez equivale a $\nu\frac{\delta_\nu}{x_n} \to 1$. En primer lugar acotamos ν: De $\left(1-\frac{\delta_\nu}{x_n}\right)^{\nu} < p_n^{\mu}\,\delta$ se sigue

$$\nu < \mu\,\frac{\log\delta + \log p_n}{\log x_\nu + \log\left(1-\frac{\delta_\nu}{x_n}\right)} < \mu\,\frac{\log\delta + \log p_n}{\log x_\nu} < \mu\,\frac{\log\delta + \log p_n}{\frac{22}{5}\log\log p_n} < \mu\,\frac{\log p_n}{\log\log p_n}.$$

Por otra parte se sabe que la diferencia entre números primos consecutivos para números x suficientemente grandes es menor que $x^{6/11}$. Por lo tanto

$$\delta_\nu < \nu x_n^{6/11}.$$

Uniendo ambos resultados, y recordando que según el enunciado $x_n > (\log p_n)^{22/5}$,

$$\nu\frac{\delta_\nu}{x_n} < \frac{\nu^2}{x_n^{5/11}} < \frac{\mu^2\,(\log p_n)^2}{(\log\log p_n)^2\,(\log p_n)^2} = \frac{\mu^2}{(\log\log p_n)^2} \to 0.$$

Por lo tanto se cumple $\frac{\log x_n}{\log p_n} < \epsilon\frac{\mu}{\nu}$, con $\epsilon \to 1$ uniformemente para todos los α considerados. Puesto que esto se cumple para todo μ se puede tomar una sucesión de valores de μ crecientes de manera que se siga cumpliendo, de donde

$$\frac{\log x_n}{\log p_n} < \epsilon\theta\frac{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log 2}$$

con $\theta > 1$ y $\epsilon > 1$, y $\theta \to 1$ y $\epsilon \to 1$ de manera uniforme.

En modo del todo análogo se demuestra

$$\frac{\log x_n}{\log p_n} < \epsilon' \theta' \frac{\log\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\log 2},$$

con $\theta' < 1$ y $\epsilon' < 1$, y $\theta' \to 1$ y $\epsilon' \to 1$ de manera uniforme. Por tanto

$$\frac{\log x_n}{\log p_n} \sim \frac{\log\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\log 2}$$

de manera uniforme, y finalmente, para todos los pares α, β con $x_n, y_n > (\log p_n)^{22/5}$,

$$\frac{\log x_n}{\log y_n} \sim \frac{\log\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\log\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

de modo uniforme.