Sean b, n, k números naturales y sea $\sum_b(n,k)$ la siguiente suma:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}^b k\frac{i\pi}{n}}{\operatorname{sen}^b \frac{i\pi}{n}}.$$

(Para el término $i = n$ tómese el límite $i \to n$). El problema 168 de 2010 pedía esencialmente calcular $\sum_2(n,k)$ con $k \leq n$. La expresión obtenida como solución deja de ser válida para $k > n$.

a) Calcular (o encontrar un método para ir calculando) $\sum_b(n,k)$ para valores de b pares, así como la desigualdad que relaciona k y n en cada caso para que la expresión obtenida sea válida. Obtener explicitamente las expresiones para los primeros valores de b.

b) Lo mismo para valores de b impares. Considérese solamente valores de k impares, ya que si b es impar y k es par los términos se anulan dos a dos (con una ligera modificación en la definición de la suma) y la suma vale cero.

c) A partir de las expresiones anteriores calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^b \alpha}{\alpha^b}\, d\alpha$$

Solución:

Emplearemos la siguiente notación para un ángulo indeterminado α:

$$\mathrm{S} = \operatorname{sen}\alpha, \quad \mathrm{C} = \cos\alpha, \quad \mathrm{S}_n = \operatorname{sen} n\alpha, \quad \mathrm{C}_n = \cos n\alpha, \quad t = (2\mathrm{S})^2.$$

Si $r_1, r_2, r_3, ...$ son las raíces de un polinomio escribiremos

$$\Sigma_1 = \sum_i r_i, \quad \Sigma_2 = \sum_{i<j} r_i r_j, \quad \Sigma_3 = \sum_{i<j<k} r_i r_j r_k, \quad \text{etc.},$$

$$\Sigma_{-1} = \sum_i \frac{1}{r_i}, \quad \Sigma_{-2} = \sum_{i<j} \frac{1}{r_i r_j}, \quad \Sigma_{-3} = \sum_{i<j<k} \frac{1}{r_i r_j r_k}, \quad \text{etc.};$$

$$\mathrm{T}_1 = \sum r_i, \qquad \mathrm{T}_2 = \sum r_i^2, \qquad \mathrm{T}_3 = \sum r_i^3, \qquad \text{etc.},$$

$$\mathrm{T}_{-1} = \sum_i r_i^{-1}, \qquad \mathrm{T}_{-2} = \sum r_i^{-2}, \qquad \mathrm{T}_{-3} = \sum r_i^{-3}, \qquad \text{etc.}$$

Recordamos las fórmulas de Newton que permiten obtener los T_i a partir de los Σ_i:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_1 = \Sigma_1\\
&\mathrm{T}_2 = \Sigma_1\mathrm{T}_1 - 2\Sigma_2\\
&\mathrm{T}_3 = \Sigma_1\mathrm{T}_2 - \Sigma_2\mathrm{T}_1 + 3\Sigma_3\\
&\mathrm{T}_4 = \Sigma_1\mathrm{T}_3 - \Sigma_2\mathrm{T}_2 + \Sigma_3\mathrm{T}_1 - 4\Sigma_4\\
&\quad\text{etc.}
\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_{-1} = \Sigma_{-1}\\
&\mathrm{T}_{-2} = \Sigma_{-1}\mathrm{T}_{-1} - 2\Sigma_{-2}\\
&\mathrm{T}_{-3} = \Sigma_{-1}\mathrm{T}_{-2} - \Sigma_{-2}\mathrm{T}_{-1} + 3\Sigma_{-3}\\
&\mathrm{T}_{-4} = \Sigma_{-1}\mathrm{T}_{-3} - \Sigma_{-2}\mathrm{T}_{-2} + \Sigma_{-3}\mathrm{T}_1 - 4\Sigma_{-4}\\
&\quad\text{etc.}
\end{aligned}\tag{2}$$

Por último, un subíndice $[0,\pi]$ en un sumatorio indicará que los ángulos para los cuales se suma son los que resultan de dividir el intervalo $[0,\pi]$ en n partes iguales. Análogamente emplearemos $[0,2\pi;n]$ y $[0,2\pi;2n]$ para la división de toda la circunferencia en n o $2n$ partes.

Sea $n = 2n'$ un número par cualquiera (no es por tanto la n del enunciado). Se tiene

$$\mathrm{C}_n = \pm\frac{1}{2}\,t^{n'} \mp \frac{n}{2}\,t^{n'-1} \pm \frac{n(n-3)}{2\cdot 2!}\,t^{n'-2} \mp \frac{n(n-4)(n-5)}{2\cdot 3!}\,t^{n'-3}\,...+1$$

en donde se toma el signo superior si $n = 4\lambda$ y el inferior si $n = 4\lambda + 2$.

Haciendo $\mathrm{C}_n = \delta$, las soluciones de esta ecuación considerada como un polinomio en t son los valores de t correspondientes a los ángulos α para los cuales $\cos n\alpha = \delta$:

$$0 = t^{n'} - n\,t^{n'-1} + \frac{n(n-3)}{2!}\,t^{n'-2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\,t^{n'-3}\,...\,\pm 2(1-\delta). \tag{3}$$

Mediante las fórmulas (1) podemos obtener T_r para estos valores, que son independientes del valor de δ mientras no empleemos el termino independiente del polinomio; es decir, para $r < n'$. Puesto que los coeficientes del polinomio (que son los Σ_r) son polinomios en n sin término independiente, de (1) se sigue que $\mathrm{T}_r(n)$ es un polinomio en n sin término independiente. Ahora bien, dicho polinomio solamente puede ser de primer grado, pues cuando $n \to \infty$, $\mathrm{T}_r(pn) \sim p\mathrm{T}_r(n)$. En la expresión

$$\mathrm{T}_r = \Sigma_1\mathrm{T}_{r-1} - \Sigma_2\mathrm{T}_{r-2} + ... \pm r\Sigma_r$$

el único término que aporta un elemento de primer grado en n es el último, y obtenemos inmediatamente $\mathrm{T}_r = \dfrac{1}{2}\dbinom{2r}{r}n$. Si la suma la extendemos a todos los ángulos

$\alpha + i\frac{2\pi}{n}$, siendo α un ángulo cualquiera tal que $\cos n\alpha = \delta$, cada valor de t aparece dos veces, pues $t(\alpha) = t(\alpha + \pi)$. Con este criterio tenemos

$$\mathrm{T}_{r[0,2\pi;n]} = \binom{2r}{r} n, \qquad 2r < n. \tag{4}$$

Para $\delta = 1$ los ángulos que entran en esta expresión son los de la división del intervalo $[0, 2\pi]$ en n partes iguales. Si restringimos la suma a los ángulos de 0 a π:

$$\mathrm{T}_{r[0,\pi]} = \sum_{i=1}^{n'} t(i\tfrac{\pi}{n'}) = \tfrac{1}{2}\mathrm{T}_{r[0,2\pi;2n']} = \binom{2r}{r} n',$$

de modo que escribiendo n por n' obtenemos

$$\mathrm{T}_{r[0,\pi]} = \binom{2r}{r} n, \qquad r < n. \tag{5}$$

Ahora n es un número cualquiera, par o impar.

Si k es par escribiremos $k = 2k'$, mientras que si es impar será $k = 2k' + 1$. Con la notación definida al principio se tiene

$$\mathrm{S}_k = 2\mathrm{SC}\left(k' - \frac{k'(k'k' - 1)}{3!}\,t \,...\, \mp t^{k'-1}\right), \qquad k \text{ par}; \tag{6p}$$

$$\mathrm{S}_k = \mathrm{S}\left(k - \frac{kk'(k' + 1)}{3!}\,t \,...\, \pm t^{k'}\right), \qquad k \text{ impar}. \tag{6i}$$

El problema pide calcular $\sum_{[0,\pi]} (\mathrm{S}_k/\mathrm{S})^b$.

Necesitaremos también la fórmula equivalente a (6p) para el coseno:

$$\mathrm{C}_k = 1 - \frac{k'^2}{2!}\,t + \frac{k'^2(k'^2 - 1)}{4!}\,t^2 - \frac{k'^2(k'^2 - 1)(k'^2 - 4)}{6!}\,t^3 \,... \tag{7p}$$

a) b par.

Observamos que $(2\mathrm{C})^2 = 4(1-\mathrm{S}^2) = 4-t$. Por tanto si b es par, de (6) obtenemos

$$(\mathrm{S}_k/\mathrm{S})^b = (4 - t)^{\frac{b}{2}} \left(k' - ... \mp t^{k'-1}\right)^b = k^b + ... \pm t^{\frac{b}{2}(k-1)}, \qquad k \text{ par};$$

$$(\mathrm{S}_k/\mathrm{S})^b = \left(k - ... \pm t^{k'}\right)^b = k^b + ... + t^{\frac{b}{2}(k-1)}, \qquad k \text{ impar};$$

Teniendo en cuenta que $\sum t^r = \mathrm{T}_r$ es un múltiplo de n si $r < n$ tenemos que

$$\sum_{[0,\pi]} (\mathrm{S}_k/\mathrm{S})^b = Q_b(k)n, \qquad n > \tfrac{b}{2}(k-1) \tag{8}$$

en donde $Q_b(k)$ es un polinomio de k. Tendríamos que distinguir dos polinomios, posiblemente distintos, según k fuese par o impar, atendiendo a que procede de dos fórmulas distintas, pero como veremos la forma de $Q(k)$ no depende de si k es par o impar.

Obtenemos $Q_b(k)$ calculando el valor de la suma para $n = \frac{b}{2}k$.

$$\frac{\operatorname{sen} i\frac{k\pi}{n}}{\operatorname{sen} i\frac{\pi}{n}} = \frac{\operatorname{sen} i\frac{\pi}{b/2}}{\operatorname{sen} i\frac{\pi}{n}}.$$

Sea $\mathfrak{s}_l = \operatorname{sen} l\frac{\pi}{b/2}$ y $\mathrm{S}_i = \operatorname{sen} i\frac{\pi}{n}$. La suma es entonces

$$\sum_{[0,\pi]} (\mathrm{S}_k/\mathrm{S})^b = \frac{\mathfrak{s}_1^b}{\mathrm{S}_1^b} + \frac{\mathfrak{s}_2^b}{\mathrm{S}_2^b} + \ldots + \frac{0}{\mathrm{S}_{b/2}^b} + \frac{\mathfrak{s}_1^b}{\mathrm{S}_{b/2+1}^b} + \frac{\mathfrak{s}_2^b}{\mathrm{S}_{b/2+2}^b} + \ldots \ldots + \frac{\mathfrak{s}_{b/2-1}^b}{\mathrm{S}_{n-1}^b} + k^b.$$

Descomponemos la suma en $b/2$ periodos según el numerador. Cada uno de los periodos es:

$$\sum_{i \equiv l \pmod{\frac{b}{2}}} \frac{\mathfrak{s}_l^b}{\mathrm{S}_i^b}.$$

La última suma, la correspondiente a $l = 0$, tiene todos sus términos iguales a 0 excepto el último que vale k^b.

Calculamos el valor de cada periodo mediante (2) a partir de la ecuación ($7p$), pues los S_i de los denomiandores son los de los ángulos α tales que $2k\alpha = l\frac{\pi}{b}$, de donde $\mathrm{S}_{2ki} = \mathfrak{s}_{2l}$ y $\mathrm{C}_{2ki} = \mathfrak{c}_{2l}$.

$$\mathfrak{c}_{2l} = 1 - \frac{k^2}{2!}\,t + \frac{k^2(k^2-1)}{4!}\,t^2 - \frac{k^2(k^2-1)(k^2-4)}{6!}\,t^3 + \frac{k^2(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)}{8!}\,t^4 \ldots$$

$$0 = (1 - \mathfrak{c}_{2l}) - \ldots = 2\mathfrak{s}_l^2 - \ldots = \tfrac{1}{2}\mathfrak{t}_l - \ldots$$

$$0 = 1 - \frac{2k^2}{2!\,\mathfrak{t}_l}\,t + \frac{2k^2(k^2-1)}{4!\,\mathfrak{t}_l}\,t^2 - \frac{2k^2(k^2-1)(k^2-4)}{6!\,\mathfrak{t}_l}\,t^3 \ldots \tag{9}$$

De esta ecuación obtenemos $\displaystyle\sum_{i \equiv l \pmod{\frac{b}{2}}} \frac{1}{\mathrm{S}_i^b}$.

Para evitar $\mathfrak{t}_l$ en el denominador y dado que en última instancia lo que necesitamos obtener es

$$\mathfrak{s}_l^b \sum_{i \equiv l \pmod{\frac{b}{2}}} \frac{1}{\mathrm{S}_i^b} = \sum_{i \equiv l \pmod{\frac{b}{2}}} \frac{1}{(\mathrm{S}_i/\mathfrak{s}_l)^b} = \sum_{i \equiv l \pmod{\frac{b}{2}}} \frac{1}{(t_i/\mathfrak{t}_l)^{b/2}},$$

efectuamos en (9) el cambio de variable $u = t/\mathsf{t}_l$:

$$0 = 1 - \frac{2k^2}{2!}\,u + \frac{2\mathsf{t}_l\,k^2(k^2-1)}{4!}\,u^2 - \frac{2\mathsf{t}_l^2\,k^2(k^2-1)(k^2-4)}{6!}\,u^3\;... \tag{10}$$

Ahora mediante las fórmulas (2) obtenemos $\mathrm{T}_{-b/2}$ aplicado a las variables u. Como en el apartado siguiente necesitaremos estas sumas para potencias de S impares, las llamaremos T_{-b}, siendo por tanto el subíndice la potencia de S y no la de u. La expresión obtenida será un cierto polinomio en k y t_l. Esta es la suma para el periodo l. Tendremos que sumar todos los períodos, lo que no es más que sustituír las potencias de t_l por sus correspondientes sumas, que están dadas por la expresión (5), con $n = b/2$. Por ejemplo, encontraremos que

$$\mathrm{T}_{-4} = \frac{k^4(6-\mathsf{t}_l) + \mathsf{t}_l\,k^2}{6}$$

Para sumar esto a todos los valores de l simplemente se substituye t_l por $\binom{2}{1}\frac{b}{2}$, y en general t_l^r por $\binom{2r}{r}\frac{b}{2}$. Esto incluye la suma de los términos con t_l^0; es decir, sin t_l, para los cuales es $\sum 1 = \frac{b}{2}$, de acuerdo a la expresión general. Así obtendremos el valor de la suma $\sum_{[0,\pi]} \mathrm{S}_k^b/\mathrm{S}^b$ para $n = k\frac{b}{2}$. Esta suma es, de acuerdo a (8),

$$Q_b(k)\,k\tfrac{b}{2},$$

por lo que para obtener $Q_b(k)$ simplemente tendremos que reemplazar en la expresión para T_{-b}

$$(1),\ \mathsf{t}_l,\ \mathsf{t}_l^2,\ \mathsf{t}_l^3,\ \mathsf{t}_l^4,\ \text{etc.}\quad\text{por}\quad (1),\ 2,\ 6,\ 20,\ 70,\ \text{etc.} \tag{11}$$

y disminuir una unidad los exponentes de k.

Llegamos así a las expresiones de $Q_b(k)$ para b par:

$$\mathrm{T}_{-2} = k^2 \quad\to\quad Q_2(k) = k \quad \text{(problema 168, 2010)} \tag{12_2}$$

$$\mathrm{T}_{-4} = \frac{k^4(6-\mathsf{t}_l) + \mathsf{t}_l\,k^2}{6} \quad\to\quad Q_4(k) = \frac{2k^3+k}{3} \tag{12_4}$$

$$\mathrm{T}_{-6} = \frac{k^6(\mathsf{t}_l^2 - 30\mathsf{t}_l + 120) - k^4(5\mathsf{t}_l^2 - 30\mathsf{t}_l) + 4\mathsf{t}_l^3\,k^2}{5!} \quad\to\quad Q_6(k) = \frac{11k^5+5k^3+4k}{20} \tag{12_6}$$

$$\mathrm{T}_{-8} = ... \quad\to\quad Q_8(k) = \frac{151}{315}\,k^7 + \frac{2}{9}\,k^5 + \frac{7}{45}\,k^3 + \frac{1}{7}\,k \tag{12_8}$$

que no dependen de si k es par o impar.

Por tanto la solución al apartado es

$$\sum_{[0,\pi]} \frac{\mathrm{S}_k^b}{\mathrm{S}^b} = Q_b(k)n, \qquad n > \frac{b(k-1)}{2}$$

en donde $Q_b(k)$ es un polinomio impar y los $Q_b(k)$ se van obteniendo a partir de (10) tras aplicar la sustitución (11) y disminuir una unidad los exponentes de k.

b) b impar.

Si b es impar la expresión para S_k/S es un polinomio en S en el caso k impar pero no para k par debido al término C^b. Ahora bien, si b es impar y k par los términos del sumatorio se anulan dos a dos excepto el último. Este término, $-k^b$, se anula también si definimos la suma de manera que sea exactamente la mitad de la suma para $[0, 2\pi]$, a saber, i ha de ir desde 0 hasta n y se toma solamente la mitad del valor para los sumandos de los extremos, como es habitual en sumas trigonométricas. Así definida los términos primero y último valen $k^b/2$ y $-k^b/2$ y se anulan, mientras que para cualquier otra combinación de paridad de k y b valen ambos $k^b/2$ y suman k^b, de acuerdo con la definición original de la suma.

Si k es impar entonces S_k/S sigue siendo un polinomio en k y la conclusión es otra vez que la suma es de la forma $Q_b(k)n$. Ya no podemos descomponer la suma en $b/2$ periodos, sino en b, y para poder evaluarla es necesario sumar de 0 a 2π:

$$\sum_{[0,\pi]} \frac{\mathrm{S}_k^b}{\mathrm{S}^b} = \frac{1}{2} \sum_{[0,2\pi;2n]} \frac{\mathrm{S}_k^b}{\mathrm{S}^b}, \qquad \text{siempre,}$$

$$\sum_{[0,\pi]} \frac{\mathrm{S}_k^b}{\mathrm{S}^b} = \sum_{[0,2\pi;n]} \frac{\mathrm{S}_k^b}{\mathrm{S}^b}, \qquad \text{Si } n \text{ es impar.}$$

En el primer caso se ha de cumplir $n > b\frac{k-1}{2}$ y en el segundo $n > b(k-1)$ (si n no cumple esta degualdad pero sí la anterior la expresión $Q(k)$ sigue siendo válida en el término izquierdo de la igualdad pero no en el derecho). Puesto que la expresión para la suma en $[0, 2\pi; n]$ es $Q(k)n$, se cumple $\sum_{[0,2\pi;n]} = \frac{1}{2}\sum_{[0,2\pi;2n]}$, y la segunda de las expresiones anteriores se cumple también para n par:

$$\sum_{[0,\pi]} \frac{\mathrm{S}_k^b}{\mathrm{S}^b} = \sum_{[0,2\pi]} \frac{\mathrm{S}_k^b}{\mathrm{S}^b}, \qquad n > b(k-1). \tag{13}$$

Así que para que la expresión de $Q_b(k)$ obtenida mediante (13) sea válida hemos de tomar n igual a un múltiplo de k tal que $n > b(k-1)$. Sirve $n = kb$, pero para poner de manifiesto que el múltiplo que tomemos es irrelevante, siempre que sea suficientemente grande, tomaremos $n = k\lambda$ siendo λ un entero cualquiera $> b - b/k$.

$$\sum_{[0,2\pi]} \frac{\mathrm{S}_k^b}{\mathrm{S}^b} = \frac{\mathfrak{s}_1^b}{\mathrm{S}_1} + \frac{\mathfrak{s}_2^b}{\mathrm{S}_2} + \ldots + \frac{0}{\mathrm{S}_\lambda^b} + \ldots \ldots + \frac{\mathfrak{s}_{\lambda-1}^b}{\mathrm{S}_{n-1}} + k^b,$$

siendo ahora $\mathfrak{s}_l = \operatorname{sen} l\frac{2\pi}{\lambda}$ y $\mathrm{S}_i = \operatorname{sen} i\frac{2\pi}{n} = \operatorname{sen} i\frac{2\pi}{k\lambda}$.

Los periodos son

$$\sum_i \frac{\mathfrak{s}_l}{\mathrm{S}_i^b}, \qquad i \text{ tal que } \mathrm{S}_{ki} = \mathfrak{s}_l. \tag{14}$$

Calculamos cada una de estas sumas mediante (6i) (pues k es impar):

$$\mathfrak{s}_l = k\mathrm{S} - \frac{k(k^2-1)}{3!}\,\mathrm{S}^3 + \frac{k(k^2-1)(k^2-9)}{5!}\,\mathrm{S}^5 + ...$$

Haciendo $\mathrm{S}/\mathfrak{s}_l = u$:

$$0 = 1 - ku - \frac{\mathfrak{s}_l^2\,k(k^2-1)}{3!}\,u^3 + \frac{\mathfrak{s}_l^4\,k(k^2-1)(k^2-9)}{5!}\,u^5 + ... \tag{15}$$

De aquí se obtienen todos los T_{-b}, tanto los impares como los pares que ya obtuvimos en el apartado anterior. Ahora, para obtener $Q(k)$, hay que reemplazar $\mathfrak{s}_l^r$ por $\binom{r}{r/2}\frac{1}{2^r}$; es decir,

$$(1),\ \mathfrak{s}_l,\ \mathfrak{s}_l^2,\ \mathfrak{s}_l^3,\ \text{etc.} \quad \text{por} \quad (1),\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{16},\ \text{etc.}$$

y al igual que antes disminuir una unidad los exponentes de k. Se van obteniendo:

$$\mathrm{T}_{-1} = k \quad \to \qquad Q_1(k) = 1 \quad \left(\sum_{[0,\pi]} \frac{\mathrm{S}_k}{\mathrm{S}} = n, \quad n \geq k\right) \tag{16_1}$$

$$\mathrm{T}_{-2} = k \quad \to \qquad Q_2(k) = k \tag{16_2}$$

$$\mathrm{T}_{-3} = \frac{k^3(2-\mathfrak{s}_l^2)+\mathfrak{s}_l^2\,k}{2} \quad \to \qquad Q_3(k) = \frac{3k^2+1}{4} \tag{16_3}$$

$$\mathrm{T}_{-4} = \frac{k^4(3-2\mathfrak{s}_l^2)+2\mathfrak{s}_l^2\,k^2}{3} \quad \to \qquad Q_4(k) = \frac{2k^3+k}{3} \tag{16_4}$$

$$\mathrm{T}_{-5} = ... \quad \to \qquad Q_5(k) = \frac{115k^4+50k^2+27}{8\cdot 4!} \tag{16_5}$$

Por tanto, si b es impar y k par la suma pedida vale 0; en cualquier otro caso vale $Q_b(k)n$ siendo $Q_b(k)$ un polinomio de paridad contraria a la de b y habíendose de cumplir $n > \frac{b(k-1)}{2}$.

c) Si $n \to \infty$ entonces $\frac{\pi}{n}\sum\limits_{[0,\pi]} \to \int_0^\pi$, de donde

$$\mathrm{I}_b = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^b k\alpha}{\operatorname{sen}^b \alpha} = \pi Q_b(k), \tag{17}$$

salvo para b impar y k par en cuyo caso la integral, al igual que los sumatorios, vale 0.

$$\mathrm{I}_1 = \pi, \quad \mathrm{I}_2 = k\pi, \quad \mathrm{I}_3 = \frac{3k^2+1}{4}\pi, \quad \text{etc.}$$

Para evaluar estas integrales cuando $k \to \infty$ las dividimos en dos partes:

$$\int_0^{\pi} = 2\int_0^{\pi/2} = 2\int_{k^{-1/3}}^{\pi/2} + 2\int_0^{k^{-1/3}}$$

La primera de estas dos integrales es despreciable:

$$2\int_{k^{-1/3}}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^b k\alpha}{\operatorname{sen}^b \alpha} < 2\int_{k^{-1/3}}^{\pi/2} \frac{1}{\sim k^{-b/3}} \sim \pi k^{b/3} = o(k^{b-1}),$$

salvo para $b = 1$. Pero si b es impar se cumple algo mucho más fuerte, a saber que esta integral es $O\left(\dfrac{1}{k}\dfrac{1}{\operatorname{sen} k^{-1/3}}\right)$ y en particular tiende a 0. En cuanto a la segunda integral:

$$\sim\ 2\int_0^{k^{-1/3}} \frac{\operatorname{sen}^b k\alpha}{\alpha^b}\, d\alpha\ =\ 2\frac{k^b}{k}\int_0^{k^{2/3}} \frac{\operatorname{sen}^b \beta}{\beta^b}\, d\beta\ \sim\ k^{b-1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^b \beta}{\beta^b}\, d\beta.$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^b \beta}{\beta^b}\, d\beta = \text{Coef. ppal. de } \mathrm{I}_b = \pi \cdot \text{Coef. ppal. de } Q_b(k). \tag{18}$$

Las primeras integrales son

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \pi, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\alpha^2}\, d\alpha = \pi, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\alpha^3}\, d\alpha = \frac{3}{4}\pi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{\alpha^4}\, d\alpha = \frac{2}{3}\pi, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^5\alpha}{\alpha^5}\, d\alpha = \frac{115}{192}\pi, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^6\alpha}{\alpha^6}\, d\alpha = \frac{11}{20}\pi.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^7\alpha}{\alpha^7}\, d\alpha = \frac{5\,887}{11\,520}\pi, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^8\alpha}{\alpha^8}\, d\alpha = \frac{151}{315}\pi.$$

Cuando b es grande $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^b\alpha}{\alpha^b}\, d\alpha \sim \sqrt{\frac{6\pi}{b}}$.

Notas

- Las ecuaciones (4) y (5), piedras angulares de este desarrollo, no varían si t representa $(2\mathrm{C})^2$ en lugar de $(2\mathrm{S})^2$. Además, si en la primera de ellas n es impar la ecuación se cumple si $r < n$. La ecuación (5) deja de ser válida cuando $r = n$ porque ya se emplea el término independiente de (3), pero podemos calcularlas sin más que atender a él. La expresión general corresponde a un término independiente sin δ, mientras que (5) se deriva de $\delta = 1$. Si despejamos $t^{n'}$ obtenemos

$$t^{n'} = nt^{n'-1} - \ldots \mp 2 \pm 2\delta.$$

Por tanto a la expresión general hay que sumar $\pm 2 \sum \delta = \pm 2n'$, según sea n' par o impar. n' se convierte en n en (5).

Empleando la fórmula que expresa C_n en función de potencias de C en lugar de S el signo de 2δ resulta ser siempre positivo. Por tanto:

$$\sum_{[0,\pi]} t^n = \binom{2n}{n} n \pm 2n \tag{19}$$

El signo $-$ se toma si t representa $4\mathrm{S}^2$ y n es impar, el signo $+$ en caso contrario.

En las ecuaciones que aparecen justo antes de (8), y teniendo cuenta que para el caso k impar b también puede ser impar, el último término es $\pm t^{\frac{b}{2}(k-1)}$, en donde el signo es siempre el mismo que la paridad del exponente. Por tanto, si dicho exponente es igual a n, el término adicional $2n$ aparecerá siempre sumando en $\sum \mathrm{S}_k^b/\mathrm{S}_k$. Así pues

$$\text{Si } n = \tfrac{b(k-1)}{2}, \qquad \sum_{[0,\pi]} \frac{\mathrm{S}_k^b}{\mathrm{S}^b} = \big(Q_b(k) + 2\big)n. \tag{20}$$

- En ningún momento se obtuvo explícitamente las sumas $\sum_{[0,\pi]} \dfrac{1}{\mathrm{S}^b}$, aunque se estuvo muy cerca. Si justo antes de (15) en lugar de efectuar el cambio $\mathrm{S}/\mathfrak{s}_l = u$ simplemente se hace $\mathfrak{s}_l = 0$ y se elimina la solución $\mathrm{S} = 0$ se obtiene, escribiendo n en lugar de k,

$$0 = 1 - \frac{(n^2-1)}{3!}\mathrm{S}^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{5!}\mathrm{S}^4 + ...$$

De aquí se obtiene T_{-b} para las variables S o S^2. En este segundo caso se obtiene $\sum \mathrm{S}^{-b}$ para los ángulos del primer cuadrante. Cuando n se hace infinito esta suma es

$$\mathrm{T}_{-b} = \sum_{[0,\pi/2]} \frac{1}{\mathrm{S}^b} = \sum_{0}^{\pi/(2\sqrt{n})} + \sum_{\pi/(2\sqrt{n})}^{\pi/2} \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i\pi/n)^b} + O(n\sqrt{n}) \sim \frac{n^b}{\pi^b} \sum \frac{1}{i^b},$$

por lo que el coeficiente de la mayor potencia de n en T_{-b} multiplicado por π^b da el valor de dichas sumas. b es par.

Si se hace $\mathfrak{s}_l = 1$ o $\mathfrak{s}_l = -1$ los valores de S que cumplen la ecuación son los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2n}$; los de de la forma $4\lambda + 1$ con un signo y los de la forma $4\lambda + 3$ con el signo opuesto. Se obtienen de ahí las sumas

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3^b} + \frac{1}{5^b} - \frac{1}{7^b} + ...$$

para valores de b impares.